

# 反跳X線ブラッグ反射による ペンデルレーズング・ビートの 生成とその確証実験の提案

中島哲夫・メディアとソフトウェア

---

## ●要約

ペンデルレーズング・ビート(以下 PB と略)は軽い元素又は低密度の結晶で、室温か又はそれより高温において、且つエネルギーの高い硬X線で観測されている。即ち PB では微小な反跳エネルギーの損失による波長のズレが、ビートの生成を担っていることを暗示している。この機構を光の粒子性に基づいて、多重反射による反跳運動量の損失を取り入れた、結晶の全角運動量の量子化からブラッグの式を導き、それに基づいて1からnまでの多重反射を重ねて、新しいビートの生成を明らかにした。この考えを実証する実験の一つは、メスbauer効果の逆効果として、試料の温度を降下させ、無反跳反射の増強によりブラッグ・ピークの積分強度は増加するけれど、PB の積分強度は徐々に消失することを観察することである。

## ●キーワード

Pendelloesung Beat

Corpuscular character of light

Recoil-free reflection

Extinction distance

Kato-Lang's relation

※2002年11月18日受理(紀要編集委員会)

## 1. 序論

1959年に加藤—ラング[1]によりペンデルレーズング干渉縞又はペンデルレーズング・ビート(以後 PB と略す)と呼ばれているが、その一種、等厚干渉縞[1,2]が観測されて以来(第一図参照)、表 I に示したように、幾つかの結晶で観測されてきた。この呼称は二つの振子の連成振動の解というドイツ語からきている。以下に PB に出現条件に関連した特徴を列挙する。

表 I. ペンデルレーズング・ビートが観測された代表例

Materials	Atomic number $Z^*$	Atomic Weight $M^*$	Debye-Waller Factor		Ref.
			$\Theta_D (K)$	$E_c (keV)$	
Hexamethaline Tetramine $N_4(CH_2)_6$	3.4	6.37			[2]
C (diamond)	6	12.011	1874	24.5	[4, 5]
LiF	6	12.970	732	15.9	[1]
Dolomite $MgCa(CO_3)_2$	9.2	18.440			[6]
Quartz $SiO_2$	10	20.028	470	15.8	[1]
Al	13	26.982	390	16.7	[7]
Si	14	28.086	692	22.7	[3]
Cu	29	63.546	310	22.9	[8]
Zn	30	65.39	237	20.3	[9]
InP	32	72.897	321	25.0	[10]
GaAs	32	72.323	344	25.7	[11-14]
Ge	32	72.61	403	27.9	[15]
InAs	41	94.871	249	25.14	None
GaSb	41	95.737	266	26.10	None
InSb	50	118.285	203	25.35	None

有効原子番号  $Z^*$  及び有効原子番号  $M^*$  を形式的に次のように定義した。

$$Z^* = \sum_i n_i Z_i / \sum_i n_i \text{ 及び } M^* = \sum_i n_i M_i / \sum_i n_i.$$

( i ) 原子量にして最大73までの軽い結晶で観測されている。現在、原子番号  $Z$  が32の Ge から、 $N_4(CH_2)_6$  まで、周期表の全元素の三分の一以下である(第二図及び表 I 参照)。

( ii ) 反跳エネルギーの大きさは、軽元素故、比較的高い

$$4.47meV \leq E_R \leq 161meV$$

の範囲で観測されている(第二図及び表 I 参照)。

( iii ) 入射 X 線  $E_0$  も大きい反跳エネルギーを伴う高いエネルギー域

$$10keV \leq E_0 \leq 60keV$$

に渡っており、 $E_c$  [16]を遥かに凌駕している(第二図及び表 I 参照)。

(iv)現在までに観測されたPBは室温からデバイ温度の高温にまで及んでおり、結晶の剛体性の低い状態で出現している。

これらの特徴は、反跳X-線反射が誘起され易く、反射の多重度によるX-線の波長の減少した波の重畳から生ずるPBを、観測し得ることを裏付けていると考えられ、それを理論的に検証した。更にこの論文では、PBのオリジンの検証実験として、メスバウアー効果での温度効果の逆効果として、温度の低下に伴う剛体性の増強による無反跳反射の減少により、PBが次第に消失していく確認実験を提案した。

## 2. 結晶内原子の反跳エネルギーの分担による補償の考察

メスバウアー[17]は、1957年に曾って経験したことが無かったエネルギー高分解能の $\Delta E/E_0 \cong 3.59 \cdot 10^{-10}$  ( $^{191}\text{Ir}$ )の $\gamma$ -線核共鳴吸収(メスバウアー効果)を発見した。先ずその過程で、エネルギー $E_0$ の $\gamma$ -線を放射する全ての原子は、化学結合力で固体の格子中に固定されており、 $c$ を光速とすると、単一自由原子の反跳エネルギー

$$E_R = \frac{1}{2m} \cdot \left( \frac{E_0}{c} \right)^2$$

は格子全体で受け止められていると考えた。 $\gamma$ -線を吸収する吸収体の原子に於いても同様である。それは上式で、単独の自由原子の質量 $m$ が、その試料の全格子点の数 $N$ とすると、 $Nm$ で置き換えられることを意味している。推定される $N$ の典型的な大きさは、1マイクロ・メータ立方の試料片に相当する原子数 $10^{10}$ から、 $10^{20}$ 個の原子からなる試料片で、反跳エネルギー $E_R$ は因子 $10^{-10}$  to  $10^{-20}$ 程度減少して：

$$E_R = \frac{E_0^2}{2Nmc^2} \cong 5.37 \cdot 10^{-20} \sim 10^{-30} \cdot \frac{E_0^2(\text{keV})^2}{M_a(\text{kg/mol})}, \quad (1)$$

となる[18]。ここで $M_a$ は原子量で、 $E_0/M_a$ は高々 $10^1$ から $10^5$ の範囲に収まる。(1)式から明らかなように、厳密に無反跳 $E_R=0$ は実現できないが、原子の数と質量の大きさだけから近似的に $E_R \cong 0$ は実現出来、見かけ上、(1)式は $\gamma$ -線核共鳴吸収に重要な無反跳を実現していることになる。

ここで注意すべきことは、結晶の結合性とそれに依存する原子振動とその振幅の温度依存性を考慮することである。一般に物質の温度を下げると、原子の振動数は低くなり、その振幅も小さくなり、低温硬化や脆性で象徴されるように、剛体性が増強する。メスバウアーは、 $\gamma$ -線放射性元素を含む結晶の温度が、低温になればなるほど、 $\gamma$ -線の核共鳴吸収断面積が増加するという実験結果から、結晶の剛体性の増強をメスバウアー効果で明確に示した(第三図参照)。その意味で、 $\gamma$ -線核共鳴吸収の発見以来、弾性定数の測定装置を用いなくても、 $\gamma$ -線核共鳴吸収は微視的な現象を通じて固体の剛体性とその温度変化を観測していると理解されている。それをバルク効果として、デバイの比熱の理論に基づいて考察されている[18-21]。

(1)式の格子点の数即ち原子数 $N$ は、偶々採用された任意の試料の大きさから決まり、現象を支配する物理的な条理から定められていない。メスバウアー効果の場合と異なり、PBの生成では、 $N$ の大きさは適正な波長のズレに関わっている。それ故、第三図の $\gamma$ -線吸収断面積の温度依存性は、剛

体性の温度変化により反跳を補償する有効原子数が変わると考え、一原子当たりの反跳許容分担率 (partial charge rate of recoil accomodation)  $\Delta(T) = \delta(T)/N$  を導入すると (付録 I 参照)、(1)式は

$$E_R = \frac{\Delta(T)}{2m} \cdot \left( \frac{E_0}{c} \right)^2 \cong 5.37 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{\delta(T) E_0^2 (keV)^2}{NM_a (kg/mol)} \quad (2)$$

と表される。

### 3. 理論的考察

#### 3-1 反跳累積光子運動量短縮を考慮した多重反射によるブラッグの式の誘導

z-軸に沿って  $d_{hkl}$  の間隔で無限に連なる結晶を考える (第四図参照)。古典量子論によれば、結晶に作用する外力が無い場合、第四図に示した散乱ベクトルに平行な z-軸方向の運動量  $p_z$  によって記述される運動は

$$\oint p_z dz = p_z \int_0^{d_{hkl}} dz = p_z d_{hkl} = nh, \quad (3)$$

によって与えられる。ここで  $n$  は反射の次数、 $h$  はプランクの定数である。(2)式の  $\Delta(T)$  (付録 I の (I-8) 式) を用いて、 $r$  回反射の結晶の反跳運動量と光子の合成運動量  $p_z$  は、

$$\begin{aligned} p_z &= nh / d_{hkl} \\ &= \{ (h/\lambda_0) - 2(r-1)\Delta(T)mv - \Delta(T)mv \} \sin \theta_B \\ &\quad + \{ (h/\lambda_0) - (2r-1)\Delta(T)mv - \Delta(T)mv \} \sin \theta_B \end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる。ここで  $\theta_B$  ブラッグ角、 $\lambda_0$  は X-線の波長である。(第四図参照)

(4)式をベクトルで表すと次のようになる。入射ベクトル  $\hbar \vec{k}_0$ 、反射ベクトル  $\hbar \vec{k}$  とすると、散乱ベクトル  $\vec{p}_z$  は

$$\vec{p}_z = \left( \hbar \vec{k}_0 - (2r-1)\Delta(T)mv \right) - \left( \hbar \vec{k} - 2r\Delta(T)mv \right)$$

となり、新しいブラッグの条件を表している。ここで  $\hbar = h/2\pi$ 、波数ベクトル  $|\vec{k}_0| = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$  である。

(4) 式の  $r$  回目の反射を考察する。吸収される前の光子の運動量は累積反跳運動量  $2(r-1)\Delta(T)mv$  だけ短縮した合成運動量  $(h/\lambda_0) - 2(r-1)\Delta(T)mv$  であるが、吸収による反跳運動量  $\Delta(T)mv$  の減少により  $(h/\lambda_0) - (2r-1)\Delta(T)mv$  となる。これは光子放射前の累積反跳運動量が加わった合成運動量をもつ原子の励起状態となる。光子放射後、更に反跳運動量  $\Delta(T)mv$  の減少により  $(h/\lambda_0) - 2r\Delta(T)mv$  となる。

第五図でブラッグの条件を満たさない透過の場合は、やはり入射、励起状態、放射を通じて、光子の運動量は  $2r\Delta(T)mv$  だけ累積し、その結果短縮した運動量は  $(h/\lambda_0) - 2r\Delta(T)mv$  となる。従って結晶に入射して出射するまで、回折、透過に拘わらず、光路長は同じで、運動量は同じ大きさだけ反跳により累積、短縮する。

付録 I の (I-8) 式、 $\Delta(T)mv = \Delta(T)h/\lambda_0$  を用いると、(4)式は修正された新しいブラッグの式



$$2 d_{hkl} \sin \theta_B = \frac{n \lambda_0}{1 - \left(2r - \frac{1}{2}\right) \Delta(T)}$$

となる。後程示されるように  $2r \Delta(T) \ll 1$  であり、且つ  $r \gg 1$  であることから

$$2 d_{hkl} \sin \theta_B = n \lambda_0 \{1 + 2r \Delta(T)\} \quad (5)$$

と表わされる。(5)式で一回反射( $r=1$ )の場合、 $2\Delta(T) \ll 1$ を考慮して、通常のブラッグの式が近似式として導かれる。本論文で対象にする GaAs では、反射の多重度は試料の厚さ  $\mu=200 \mu\text{m}$ ,  $d_{200}=0.282 \text{ nm}$ ,  $\theta_B=12.4^\circ$  であるから[11-13]、

$$l = \left\lceil \frac{\mu}{d_{200} \cot \theta_B} \right\rceil + 1 = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{0.282 \cdot 10^{-9} \cdot \cot 12.4^\circ} + 1 \cong 155,933 \quad (6)$$

が得られる。(第四図参照) ここで用いた  $\lceil \rceil$  はガウスの記号で、その数を越さない、最大の整数を表す。従って(5)式の  $2l \Delta(T)$  は次のごとく反跳を考慮した高次の多重反射による波長  $\lambda$  のズレの相対的变化

$$(\Delta\lambda/\lambda_0)_R = l(\Delta\lambda/\lambda_0)_r = 2l\Delta(T) \quad (7)$$

を表している。従って、 $2\Delta(T)$  はブラッグの式でも述べたように、一回の反跳反射による波長の相対的变化を表している。

次に動力的 X-線回折理論による PB の波長の相対的变化を検討する。先ずビートの典型的な例として、等しい振幅  $A$  と反跳により微小量異なる二つの振動数  $\omega_1 = \omega_0$ ,  $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$  の正弦波  $\psi_1(t) = A \sin \omega_1 t$ ,  $\psi_2(t) = A \sin \omega_2 t$  で与えられ波動を考える。或る瞬間にこの空間で可干渉であるとすると合成波

$$\phi_1(t) + \phi_2(t) = A(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t)$$

は三角関数の有限級数の公式((A1)付録 I 参照)を用いると

$$\begin{aligned} &= A \sum_{r=1}^2 \sin[\omega_0 + (n-1)\Delta\omega] t \\ &= \frac{A \sin\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right) t \sin \Delta\omega t}{\sin \frac{1}{2}\Delta\omega} \\ &= 2A \sin\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right) t \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。周波数の和  $1/2(\omega_1 + \omega_2)$  が高過ぎて、観測されないので、(8)式は  $\psi(t) \cong A_1 \cos \Delta\omega t/2$  の形に纏められ、ビートの周波数のみが現れる。

分散関係  $\omega = ck$  をもちいると、ビートの周期は

$$\begin{aligned} \tau &= 4\pi/(\omega_2 - \omega_1) \\ &= 2\lambda_1 \lambda_2 / c(\lambda_1 - \lambda_2) \\ &= \lambda_{t_0}/c, \end{aligned} \quad (9)$$

と表される。ここで  $\lambda_{t_0}$  は加藤-Lang の関係から消衰距離の二倍  $2t_0$  で、PB の節平面間又は腹平面間の距離が与えられる[1, 22, 23]。近似的に  $\lambda_1 \cong \lambda_2$  を  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1 - \lambda_2$  と  $\Delta\lambda$  置くと、(9)式から動力的

X線回折理論による波長のズレ $(\Delta \lambda / \lambda_0)_D$ は

$$(\Delta \lambda / \lambda_0)_D = 2 \lambda_0 / \lambda_{t_0}, \quad (10).$$

となる。これは(7)式と同義で、PB が出現するときの波長のズレを表している。これらの詳細を次節で考察する。

### 3-2 波長のシフトによる PB の実験的考察

(7)式と(10)式の取り扱い方法は物理的に全く異なるが、同一の現象を理解することを目指しており、比較検討は重要である。(7)式を検証するには、反跳許容分担率を第一原理から導く必要があるが、それは本論文の主旨ではないので、ここでは助変数として取り扱う。原子数  $N$  の決定のため、精度ある試料の大きさ又は質量の測定データが必要である。併し多くの実験では、それらは無用なので、精密に決定されていない。使用に耐える実験一つは、放射光実験施設で行われた GaAs(200) ( $a=0.56419$  nm) の GaK (10.268 keV) 吸収端近傍の、新しいタイプの異常散乱によるペンデルレーズン・ビートの測定実験を対象にする[11-13]。

結晶 GaAs の全原子数  $N$  は試料のサイズ、 $\mu = 200 \mu$  m の厚さで、10 mm 平方から  $8.88 \cdot 10^{20}$  が得られた。従って反跳から定まる GaAs(200) の場合、波長のズレは(7)式により

$$(\Delta \lambda / \lambda_0)_R \cong 2l \frac{\delta(300)}{N} = \frac{2 \cdot 155,933 \delta(300)}{8.88 \cdot 10^{20}} = 3.51 \cdot 10^{-16} \delta(300) \quad (11)$$

となる。然るに、GaAs で  $\pi$  偏光場合の  $t_0 \cong 55.04 \mu$  m を用いると、 $\lambda_{t_0} \cong 110.08 \mu$  m、 $\lambda_0 \cong 0.1208$  nm から、(10)式の値は

$$(\Delta \lambda / \lambda_0)_D = 2 \lambda / \lambda_{t_0} = \frac{2 \times 0.1208 \cdot 10^{-9}}{110.08 \cdot 10^{-6}} \cong 2.19 \cdot 10^{-6}, \quad (12)$$

となる。(11)式と(12)式から、 $\delta(300) \cong 6.24 \cdot 10^9$  となる。 $\delta(T)$  は消衰距離によって特徴付けられていることになる。 $\Delta^{-1}(300)$  は  $1.42 \cdot 10^{11}$  となり、試料中で反跳速度を分担が許容される有効原子数となる。 $\delta^{-1}(300) (=6.24 \cdot 10^9)$  は試料の全原子数  $N$  に対する有効数の比率となり、それは温度に依存すると考えられる(表 II 参照)。(2)式を用い、一光子の入射により、ビートを生成するのに消費した反跳エネルギーは、 $M_a = 69.723$  (g/mol (for Ga))を用いて、

$$E_R \cong \frac{5.37 \cdot 10^{-10} \times 6.352 \cdot 10^9 \times 10.268^2 (keV)^2}{8.88 \cdot 10^{20} \times 0.069723 (kg/mol)} \cong 5.81 \cdot 10^{-18} (keV)$$

が得られる。試料の有効一原子 1 個当たりが受ける反跳エネルギーは、 $E_R = 5.81 feV$  で、この反跳で生ずる波長のズレの干渉から、唸りが生成していることになる。

GaAs の GaK  $\alpha$  吸収端近傍の異常散乱による PB に関連した物理量を表 II に纏めた。

表Ⅱ．GaAs について得られた種々の物理量。分散関係  $\omega = ck$  から、 $\Delta\lambda/\lambda_0 = -\Delta\omega/\omega_0$  を用いる。符号は増減を表しており、ここでは絶対値を示す。

$\lambda_{i_0}$ (m)	$\tau$ (sec)	$l$	$\delta$ (300)	$\Delta$ (300)	$E_R$ (eV)
[1, 23, 24]	(9)式より	(6)式より	(11)式より	定義より	(2)式より
$110.08 \cdot 10^{-6}$	$3.67 \cdot 10^{-13}$	155933	$6.24 \cdot 10^9$	$7.02 \cdot 10^{-12}$	$5.81 \cdot 10^{-18}$
$\lambda_0$ (m)	$(\Delta\lambda/\lambda)_D$	$\Delta\lambda$ (m)	$\omega_0$ (rad/sec)	$\Delta\omega$ (rad/sec)	$l\Delta\omega$ (rad/sec)
GaK $\alpha$ X-ray	(12)式より	(12)式より	$\lambda_0$ より	(7)式より	(7)式より
$0.121 \cdot 10^{-9}$	$2.20 \cdot 10^{-6}$	$2.65 \cdot 10^{-16}$	$1.56 \cdot 10^{19}$	$2.19 \cdot 10^8$	$3.41 \cdot 10^{13}$

#### 4. 多重反射による回折波及び透過波の PB の生成

第五図から、回折波(diffracted wave)と透過波(transmitted wave)の組み合わせにより起こり得る光路の数は確率事象として、この場合各々等価と考えて  $d=1$ 、 $t=1$  と略記して、の数は二項定理から

$$(d+t)^n = \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} d^{n-r} t^r = 2^n$$

となる。三次元に立体的に分布するスリット即ち散乱原子による、回折波は奇数回、透過波は偶数回の「進行の状態」である反射を経て、多重度  $n$  のとき、何れも各々  $n$  個のモードの光子を出射し、原理的にはそれらの重ね合わせによるビートを発生する(第五図参照)。P. A. M. Dirac[24] によれば次のように述べている。

“We must now describe the photon as going partly into each of the two components into which the incident beam is split. The photon is then, as we may say, in a *translational state* given by the superposition of the two *translational states* associated with the two components. We are thus led to a generalization of the term '*translational state*' applied to a photon. For a photon to be in a definite translational state it need not be associated with one single beam of light, but may be associated with two or more beams of light which are the components into which one original beam has been split. In the accurate mathematical theory each translational state is associated with one of the wave function of ordinary wave optics, which wave function may describe either a single beam or two or more beams into which one original beam has been split. Translational states are thus superposable in a similar way to wave functions.”

従って、透過波のビートは、偶数回反射によって生ずるから、付録Ⅱの(Ⅱ-1)，(Ⅱ-2)式のと表わされる(13)式から、付録Ⅲで示された結果(Ⅲ-2)，(Ⅲ-3)式により、(Ⅲ-4)式即ち次の(14)式が得られる。又同様に(Ⅲ-5)，(Ⅲ-6)式を用い(Ⅲ-7)式即ち(15)式が得られる。

$$\begin{aligned} \phi(t) &\propto \sum_{p=1}^n \sin[\omega_0 + 2p\Delta\omega]t \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin\left[\omega_0 + \frac{n-1}{2}\Delta\omega\right]t \cdot \sin\frac{n}{2}\Delta\omega t}{\sin\frac{\Delta\omega t}{2}} + \frac{\sin\left[\omega_0 t + \frac{n-1}{2}(\Delta\omega t + \pi)\right] \cdot \sin\frac{n}{2}(\Delta\omega t + \pi)}{\cos\frac{\Delta\omega t}{2}} \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin\left[\omega_0 + \frac{n-1}{2}\Delta\omega\right]t \cdot \sin\frac{n+1}{2}\Delta\omega t}{\sin\Delta\omega t} & n: odd \\ \frac{\sin\left(\omega_0 + \frac{n}{2}\Delta\omega\right)t \cdot \sin\frac{n}{2}\Delta\omega t}{\sin\Delta\omega t} & n: even \end{cases} \quad (14)$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin\left[\omega_0 + \frac{n-1}{2}\Delta\omega\right]t \cdot \sin\frac{n+1}{2}\Delta\omega t}{\sin\Delta\omega t} & n: odd \\ \frac{\sin\left(\omega_0 + \frac{n}{2}\Delta\omega\right)t \cdot \sin\frac{n}{2}\Delta\omega t}{\sin\Delta\omega t} & n: even \end{cases} \quad (15)$$

回折波によるビートは奇数回反射で、同様に付録Ⅱの(Ⅱ-1),(Ⅱ-2)式の差で表される(16)式から、付録Ⅲの(Ⅲ-2),(Ⅲ-3)式により(Ⅲ-8)式、即ち次の(17)式が、(Ⅲ-5),(Ⅲ-6)式により(Ⅲ-9)式、即ち(18)式が得られる。

$$\phi(t) \propto \sum_{p=1}^n \sin[\omega_0 + (2p+1)\Delta\omega]t$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin\left[\omega_0 + \frac{n-1}{2}\Delta\omega\right]t \cdot \sin\frac{n}{2}\Delta\omega t}{\sin\frac{\Delta\omega t}{2}} - \frac{\sin\left[\omega_0 t + \frac{n-1}{2}(\Delta\omega t + \pi)\right] \cdot \sin\frac{n}{2}(\Delta\omega t + \pi)}{\cos\frac{\Delta\omega t}{2}} \right\} \quad (16)$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin\left[\omega_0 + \frac{n-1}{2}\Delta\omega\right]t \cdot \sin\frac{n-1}{2}\Delta\omega t}{\sin\Delta\omega t} & n: odd \end{cases} \quad (17)$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin\left[\omega_0 + \frac{n-2}{2}\Delta\omega\right]t \cdot \sin\frac{n}{2}\Delta\omega t}{\sin\Delta\omega t} & n: even \end{cases} \quad (18)$$

(14),(15),(17),(18)式の $n$ を含む項は、(6)式の $l$ を一般の整数として

$$\phi(t) \propto \frac{\sin(\omega_0 + l\Delta\omega)t \cdot \sin l\Delta\omega t}{\sin\Delta\omega t} \quad (19)$$

の形に帰せられる。これが反跳により振動数が減少した $l$ 個の波の重畳により生じる新しい唸りの表式である。(19)式の分子は形のうえで第二項は振幅として第一項の高調波の包絡線になり、二つの波によるビートの表現(8)式と一致する。(7)式の $(\Delta\lambda/\lambda)_r$ に対応する分母の基本波は分子の第二項と合成積になっている。基本波はこの包絡線の振幅変調を行う。第六図に $l=10$ の正弦波の包絡線と分母の基本波による振幅変調を受けた変調包絡線を示した。変調の詳細が明確に分かる。

次の公式(18)(付録Ⅳ参照)

$$\sin l\Delta\omega t = 2^{l-1} \prod_{r=1}^l \sin\left(\Delta\omega t + \frac{r-1}{l}\pi\right) \quad (20)$$

を用いると、(19)式は

$$\phi(t) \propto 2^{l-1} \sin(\omega_0 + l\Delta\omega)t \cdot \prod_{r=1}^{l-1} \sin\left(\Delta\omega t + \frac{r}{l}\pi\right) \quad (21)$$

の形に表わせる。

既に触れたが、第六図は $l=10$ の場合について、(20)式が振幅変調を受ける前の曲線(a)と、変調後((21)式の多重積の項)の曲線(b)を示した。表Ⅱから明らかのように、 $1 \gg l\Delta\omega/\omega_0$ である。

それ故 $\omega_0$ は周波数が高過ぎ、観測出来ない。従って、(21)式は次の(22)式に書き換えられる。第七図には式(22)の $l=19$  (上図) ,  $20$  (下図) の場合について示した。

$$\phi(t) = 2^{l-1} A \prod_{r=1}^{l-1} \sin\left(\Delta\omega t + \frac{r}{l} \pi\right) \quad (22)$$

(22)式の波動は振幅変調を受け、基本波が $\pi/n$ の逐次等位相差でズレた正弦波の積で覆われている。 $\pi$ 毎に取るピークの値は(19)、(20)式から $\Delta\omega t = m\pi + \delta$ を用い

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\omega t \rightarrow m\pi} \frac{\sin l\Delta\omega t}{\sin \Delta\omega t} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin l(m\pi + \delta)}{\sin(m\pi + \delta)} \left\{ = 2^{l-1} \prod_{r=1}^{l-1} (-1)^m \sin \frac{r}{l} \pi \right\} \\ &= (-1)^{m(l-1)} l = \begin{cases} l & (l: \text{odd}) \\ -l & (l: \text{even} \ \& \ m: \text{odd}) \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

と示される。第七図で示されたような振幅変調された周期が $l\Delta\omega$ の唸りの振動のみ現れることになる。振幅変調を受けた(22)式は $l$ と $\Delta\omega$ を周期とする二つの周期による変化がある。ビートのビート、即ちダブル・ビートを形成しており、それが実測されているPBである。基本となる(17)式から考察すると、多重度で累積された $l\Delta\omega$ の正弦波が、 $\Delta\omega$ の余割函数( $\text{cosec } \Delta\omega t$ )で振幅変調され、(23)式で表されるように、 $\Delta\omega$ を周期とし、 $l$ 毎に $l$ を尖頭値とする、脈動の唸りを形成している(第七図参照)。このピークは現在観測されていない。

第七図平底型抱絡線は、推定される0.18 psecの半値幅(表Ⅱの $l\Delta\omega$ より)の尖頭値をもち、光子計数器の低分解能、試料の厚さの非一様性、アナログデジタル変換器の遅延による光子の数え落とし、測定機器の時定数の不適正、機器応答函数によるコンボリューションのため、(22)式の唸りの真正な固有曲線はfade outされ、第一図で示されたような測定結果が観測されていると考えられる。X線カメラによるデジタル・トポグラフなどの導入や、入念な高感度・高分解能の機器による光子計数の改善により、(22)式による真正なビート・プロフィールが再現されると思われる。

この観測は、本論文に述べられたPB発生機構の確認実験の一つとして重要であり、将来の研究にまたれる。

## 5. この仮説の真偽を確認する実験の提案

序論で触れたように、反跳を伴う反射が優先的に増強される条件即ち、室温又はそれより高温で、硬X-線を用い、軽元素或いは低密度の結晶で、PBが幾つかの結晶で観測されてきた。併し、Geより重い閃亜鉛鉱構造のInAs、GaSb、InSbで観測される可能性がと予想されているが、今日現在未だ観測されていない。出来るだけ高エネルギーX線を使用し、高温で試みる事は重要である。

温度効果の面から検証するため、デバイ温度の比較的高いシリコンと逆に低いアルミニウムのDebye-Waller(D-W)因子<sup>[16]</sup>

$$D = \exp\left[-(E_0 \sin \theta_B / E_C)^2 \Phi(t)\right] \quad (\Phi(t) = 1 + 4t^2 \int_0^{1/t} y dy / (\exp y - 1))$$

と温度因子 $\Phi(t)$ を表Ⅲに掲げた。D-W因子 $D$ はブラッグ反射の無反跳反射の割合を与え、その余数 $1-D$ は反跳反射の割合を示す<sup>[16,18,20,21]</sup>。 $\Phi(t)$ の還元温度( $t$ )依存性は定義されている式から分かるように、物質に依って変わらず、普遍的な関数曲線上にある。然るにD-W因子に依る無反跳と反跳

表Ⅲ Si(220) 及び Al(111) の温度因子  $\Phi(t)$ ,  $D$  と  $1-D$ . 最後の欄は極限の値として各々の融点をとった。(  $t=T/\Theta_D$  )

Si(200).  $20.7\text{keV} \leq E_0 \leq 37.6\text{keV}$  に対して,  $8.19\text{meV} \leq E_R \leq 28.02\text{meV}$ [23]

	0K( $t=0$ )	77K( $t=0.111$ )	300K( $t=0.434$ )	573K( $t=0.828$ )	1687K( $t=2.43$ )
$\Phi(t)$	1	1.086	1.980	3.467	9.76
$D$	0.980	0.979	0.961	0.932	0.82
$1-D$	0.020	0.021	0.039	0.068	0.18

Al(111).  $12.4\text{keV} \leq E_0 \leq 44.3\text{keV}$  に対して,  $3.08\text{meV} \leq E_R \leq 39.0\text{meV}$ [7]

	0K( $t=0$ )	77K( $t=0.197$ )	300K( $t=0.769$ )	573K( $t=1.469$ )	934K( $t=2.39$ )
$\Phi(t)$	1	1.25	3.236	6.050	9.62
$D$	0.975	0.73	0.442	0.213	0.088
$1-D$	0.025	0.27	0.558	0.787	0.912

分率は、物質固有のデバイ温度とブラッグ条件に依存しているため、シリコンとアルミニウムの D-W 因子の  $t$ -依存性は全く異なる。全散乱は  $1=D + (1-D)$  で示されるように、無反跳と反跳は互いに拮抗的に相補的である。

Si(220) の高温におけるモザイク構造の影響を懸念して、その効果を調べるため、300K( $t=0.43$ ) と 573K( $t=0.83$ ) で観測された PB のプロフィールを第八図[23]に示した。温度因子  $\Phi(t)$  は大きく変化しているが、無反跳反射  $D$  は、デバイ温度が高いため、高い値を維持している。従って表Ⅲの Si(220) 反跳反射の比率  $1-D$  は3.9%から6.8%と persistent に低い変化を示しているが、第八図の PB の光子計数値にはそれに対応する変化は殆ど認められない。その温度変化にが観測されないのは、過度の高温軟化や熱揺動による散逸と反跳の増強が平衡していると推定される。従って第三図に示されたメスバウアー効果の場合のように、桁を変えて反跳無反跳転移は期待し難い。併し第八図の反跳によって生ずる十分大きなビートのパターンは、表Ⅲの温度下降に伴う  $\Phi(t)$  の単調減少を反映して、消衰していくことは実験的に十分確認し得る。入念な実験が期待される。

表Ⅲで絶対零度における  $1-D$  の値から、絶対零度でも室温の約1/2の比率で零点振動により反跳反射が存在していることが示されている。77K(窒素の沸点)以下では殆ど温度変化が無く、零点振動が支配的である。新しい課題の一つとして、普通の格子振動に基づく反跳散乱の減少が量子効果である零点振動に引き継がれて Pendelloesung quantum beat として極低温まで生き長らえる可能性の検証がある。

デバイ温度の低い Al では、無反跳 ( $D$ ) と反跳 ( $1-D$ ) が 0K から融点の間で、殆どゼロから 1 の間で大きく入り替わって変化している。その効果の一つとして、第九図[26]に Al の数種のブラッグ・ピークの 100K( $t=0.25$ ) から 300K( $t=.77$ ) 強度変化を示した。(h00) のみならず、(hh0), (hhh) も同様に温度上昇とともに顕著に減少すると報告されている。従って Al(111) の PB<sup>7</sup> とブラッグ・ピークの積分強度の温度依存性は  $1=D + (1-D)$  を満たしながら、激しく変化し、本論が検証される実験として興味



深い。

結論的に纏めると、PB のオリジンを反跳によるとする本論文の真偽を決定的に確認する実験は、第三図で示された  $\gamma$ -線核共鳴吸収断面積の温度依存性に対応する逆効果の実現を観測する事である。表Ⅲに基づいて説明したように、デバイ温度の違いにより規模の大きさは異なるが、室温で PB が明瞭に観測される結晶の温度を、徐々に下げながら PB を観測すると消失することである。その結果、トレンド・モードで PB とブラッグ・ピークの積分強度の溶暗と増強の対照的な変化として観測されると考えられる。

本論文では、第一原理から反跳許容分担率 (partial charge rate of recoil accomodation)  $\Delta(T) = \delta(T)/N$  を導入は行っておらず、又その詳細の理解には未だ多くの検討と精密化が残されているけれども、上述の確証実験はその基礎付けの全てに先立って、PB のオリジンを確立すべく先行されるべき実験である。種々の要因を加味した入念な実験に基づいて、可能な model theory を吟味すべきである。

## 謝辞

この論文の制作に当たり、未発表のデータの提供、有益な議論を戴いた埼玉工業大学の深町 共栄教授、吉沢 正美、根岸 利一郎両講師に深く感謝します。

## 付録 I

通常、反跳の運動学的解析は孤立した自由原子について行われてきた。それは核で扱うエネルギーは大変大きく、従って物質中の原子は自由原子と見なせると言う基礎的に物理的正当性の高い考えによる。併しそれは厳密には実現し得ない思考実験で、常に正当とは限らず、それにより棄却される効果が存在する。

ここでは一種の元素で、質量  $m$  の  $N$  個の原子からなる結晶に、エネルギー  $E_0$  の X 線光子が入射し吸収したとき、反跳速度が全原子  $N$  によって等しく分担される場合を考える。結晶中の各原子は速度  $\vec{u}_i$  で運動しているとする。運動量保存則によると、 $z$ -方向から X 線が入射した時、吸収する前、結晶と光子の運動量の和からなる全運動量は、系は吸収後等しく分配された反跳速度を含む励起状態の原子の全角運動量に等しくなる。それは  $z$ -方向に平行方向( $//$ )と垂直方向( $\perp$ )で

$$m \sum_{i=1}^N u_{i//} + \frac{E_0}{c} = m \sum_{i=1}^N \left( u_{i//} + \frac{v}{N} \right) \quad (\text{I-1})$$

$$m \sum_{i=1}^N u_{i\perp} = m \sum_{i=1}^N u_{i\perp} \quad (\text{I-2})$$

と表される。反跳速度は小さく非相対論的に扱えると仮定する。(I-1)、(I-2) 式から

$$\frac{mv}{N} = \frac{1}{N} \cdot \frac{E_0}{c} = \frac{1}{N} \cdot \frac{h}{\lambda} \quad (\text{I-3})$$

が得られる。次にエネルギー保存則を考える。吸収前は、系は X 線のエネルギー  $E_0$  と結晶の運動エネルギーからなり、吸収後は原子の励起状態のエネルギー  $E_e$  と反跳を考慮した結晶の運動エネルギーからなり、それらは等しいと置くと、



$$E_0 + \frac{m}{2} \sum_{l=1}^N (u_{l\parallel}^2 + u_{l\perp}^2) = E_e + \frac{m}{2} \sum_{l=1}^N \left\{ \left( u_{l\parallel} + \frac{v}{N} \right)^2 + u_{l\perp}^2 \right\} \quad (\text{I-4})$$

と表される。(I-4)式から  $E_e$  と  $E_0$  の差が

$$\delta E = E_e - E_0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{mv^2}{N} - \frac{mv}{N} \sum_{l=1}^N u_{l\parallel} \quad (\text{I-5})$$

と表される。(I-3) 式を用いて (I-5) 式は

$$= -\frac{1}{2Nm} \left( \frac{E_0}{c} \right)^2 - \frac{E_0}{Nc} \sum_{l=1}^N u_{l\parallel} \quad (\text{I-6})$$

と書き改められる。(I-6)式の第一項は反跳エネルギー、

$$E_R = \frac{(mv)^2}{2Nm} = \frac{1}{2Nm} \cdot \left( \frac{E_0}{c} \right)^2 \quad (\text{I-7})$$

を表す。第二項は各原子によるドップラー幅を与える。(1)式は(I-7)式で示されるが、その場合原子の数だけから室温で無反跳で、核共鳴吸収が実現可能となり、実験事実と反する。以上の誘導は、 $N=1$ と置くと、孤立した自由原子の場合になる。

$N$  の有効数は rigidity 即ち弾性定数の温度依存性を通じて定められると考えられ、(I-3) 式で  $1/N$  を

$$\Delta(T) = \frac{\delta(T)}{N}$$

と置くと、

$$\Delta(T)mv = \frac{\delta(T)mv}{N} = \frac{\delta(T)}{N} \cdot \frac{E_0}{c} = \Delta(T) \frac{h}{\lambda} \quad (\text{I-8})$$

と表される。温度因子  $\delta(T)$  は Debye-Waller 因子により適切に記述されることが考えられる。(I-8)式を用いた場合、(I-1), (I-2), (I-4), (I-6) 式の和の上限は  $[N/\delta(T)]$  となり、例えばは(I-4)式は

$$E_0 + \frac{m}{2} \sum_{l=1}^{[N/\delta(T)]} (u_{l\parallel}^2 + u_{l\perp}^2) = E_e + \frac{m}{2} \cdot \sum_{l=1}^{[N/\delta(T)]} \left\{ \left( u_{l\parallel} + \frac{\delta(T)v}{N} \right)^2 + u_{l\perp}^2 \right\}$$

となり、反跳エネルギーは次のように(2)式の表現が得られる。

$$\frac{m}{2} \cdot \sum_{l=1}^{[N/\delta(T)]} \left\{ \frac{\delta(T)v}{N} \right\}^2 = \frac{m}{2} \cdot \sum_{l=1}^{[N/\delta(T)]} \left\{ \frac{\delta(T)}{Nm} \cdot \frac{E_0}{c} \right\}^2 = \frac{\delta(T)}{2Nm} \cdot \left( \frac{E_0}{c} \right)^2$$

ここで  $[ ]$  はガウスの記号で、その数を越さない、最大の整数を表す。この場合も  $N$  の有効数  $\Delta^{-1}(T)=1$  とすると、孤立した自由原子の場合の反跳エネルギーが得られる。

## 付録Ⅱ

$$\sin[\Theta + (r-1)\theta] \sin \theta / 2 = (1/2) \{ \cos[\Theta + (r-1-1/2)\theta] - \cos[\Theta + (r-1+1/2)\theta] \}$$

に注意して、次の漸化式を右辺、左辺各々足し合わせると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
r=1: & \sin \Theta & \sin \theta / 2 = (1/2) \{ \cos [\Theta - \theta / 2] & \quad \cancel{-\cos [\Theta + \theta / 2]} \} \\
r=2: & \sin [\Theta + \theta] & \sin \theta / 2 = (1/2) \{ \cos [\Theta + \theta / 2] & \quad \cancel{-\cos [\Theta + 3\theta / 2]} \} \\
r=3: & \sin [\Theta + 2\theta] & \sin \theta / 2 = (1/2) \{ \cos [\Theta + 3\theta / 2] & \quad \cancel{-\cos [\Theta + 5\theta / 2]} \} \\
& \vdots & & \\
& \vdots & & \\
& \vdots & & \\
r=n-2: & \sin [\Theta + (n-3)\theta / 2] & \sin \theta / 2 = (1/2) \{ \cos [\Theta + (n-3-1/2)\theta] & \quad \cancel{-\cos [\Theta + (n-3+1/2)\theta]} \} \\
r=n-1: & \sin [\Theta + (n-2)\theta / 2] & \sin \theta / 2 = (1/2) \{ \cos [\Theta + (n-2-1/2)\theta] & \quad \cancel{-\cos [\Theta + (n-2+1/2)\theta]} \} \\
+ ) r=n: & \sin [\Theta + (n-1)\theta / 2] & \sin \theta / 2 = (1/2) \{ \cos [\Theta + (n-1-1/2)\theta] & \quad \cancel{-\cos [\Theta + (n-1+1/2)\theta]} \} \\
& \left\{ \sum_{r=1}^n \sin [\Theta + (r-1)\theta] \right\} \sin \theta / 2 = (1/2) \{ \cos [\Theta - \theta / 2] - \cos [\Theta + (n-1+1/2)\theta] \} \\
& = \sin \left[ \Theta + \frac{(n-1)\theta}{2} \right] \sin \frac{n\theta}{2}
\end{aligned}$$

$0 < \theta < 2\pi$  では  $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$  だから

$$\sum_{r=1}^n \sin [\Theta + (r-1)\theta] = \frac{\sin \left[ \Theta + \frac{(n-1)\theta}{2} \right] \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad (\text{II-1})$$

が得られる。又上式(II-1)の交代級数

$$\sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sin [\Theta + (r-1)\theta] = \frac{\sin \left[ \Theta + \frac{(n-1)(\theta + \pi)}{2} \right] \sin \frac{n(\theta + \pi)}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \quad (\text{II-2})$$

も得られる。

### 付録Ⅲ

(13), (16)式の第二項の分子の初項は

$$\begin{aligned}
& \sin \left[ \omega_0 t + \frac{(n-1)(\Delta\omega t + \pi)}{2} \right] = \sin \omega_0 t \cos \frac{(n-1)(\Delta\omega t + \pi)}{2} + \cos \omega_0 t \sin \frac{(n-1)(\Delta\omega t + \pi)}{2} \\
& = \sin \omega_0 t \left[ \cos \frac{(n-1)\Delta\omega t}{2} \cos \frac{(n-1)\pi}{2} - \sin \frac{(n-1)\Delta\omega t}{2} \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \right] \\
& + \cos \omega_0 t \left[ \sin \frac{(n-1)\Delta\omega t}{2} \cos \frac{(n-1)\pi}{2} + \cos \frac{(n-1)\Delta\omega t}{2} \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \right] \quad (\text{III-1})
\end{aligned}$$

と表される。

先ず(Ⅲ-1)式で  $n=2m+1$  の場合について計算すると

$$\begin{aligned}
&= \sin \omega_0 t (\cos m \Delta \omega t \cos m \pi - \sin m \Delta \omega t \sin m \pi) \\
&\quad + \cos \omega_0 t (\sin m \Delta \omega t \cos m \pi + \cos m \Delta \omega t \sin m \pi) \\
&= (-1)^m \sin(\omega_0 + m \Delta \omega) t
\end{aligned} \tag{III-2}$$

となる。同様に  $n=2m+1$  で次項は

$$\begin{aligned}
\sin \frac{n(\Delta \omega t + \pi)}{2} &= \sin \frac{(2m+1)(\Delta \omega t + \pi)}{2} \\
&= \sin \frac{(2m+1)\Delta \omega t}{2} \cos \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi + \cos \frac{(2m+1)\Delta \omega t}{2} \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi \\
&= (-1)^m \cos \frac{(2m+1)\Delta \omega t}{2}
\end{aligned} \tag{III-3}$$

となる。(III-2) 式、(III-3) 式を (13) 式に代入すると透過波で  $n=2m+1$  の場合は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(\omega_0 + m \Delta \omega) t \sin \frac{(2m+1)\Delta \omega t}{2}}{\sin \frac{\Delta \omega t}{2}} + \frac{(-1)^{2m} \sin(\omega_0 + m \Delta \omega) t \cos \frac{(2m+1)\Delta \omega t}{2}}{\cos \frac{\Delta \omega t}{2}} \right\} \\
&= \frac{\sin(\omega_0 + m \Delta \omega) t \sin(m+1)\Delta \omega t}{\sin \Delta \omega t} \\
&= \frac{\sin \left[ \omega_0 + \frac{(n-1)\Delta \omega}{2} \right] t \sin \left( \frac{n+1}{2} \right) \Delta \omega t}{\sin \Delta \omega t}
\end{aligned} \tag{III-4}$$

となることが分かる。

次に(III-1)式で  $n=2m$  の場合を考察する。式(III-1)は

$$\begin{aligned}
&\sin \omega_0 t \left[ \cos \frac{(2m-1)\Delta \omega t}{2} \cos \left( m - \frac{1}{2} \right) \pi - \sin \frac{(2m-1)\Delta \omega t}{2} \sin \left( m - \frac{1}{2} \right) \pi \right] \\
&+ \cos \omega_0 t \left[ \sin \frac{(2m-1)\Delta \omega t}{2} \cos \left( m - \frac{1}{2} \right) \pi + \cos \frac{(2m-1)\Delta \omega t}{2} \sin \left( m - \frac{1}{2} \right) \pi \right] \\
&= (-1)^m \left[ \cos \omega_0 t \cos \frac{(2m-1)\Delta \omega t}{2} - \sin \omega_0 t \sin \frac{(2m-1)\Delta \omega t}{2} \right] \\
&= (-1)^m \cos \left[ \omega_0 + \frac{(2m-1)\Delta \omega}{2} \right] t
\end{aligned} \tag{III-5}$$

となる。又同じく遇数  $n=2m$  で次項は

$$\begin{aligned}
\sin \frac{n(\Delta \omega t + \pi)}{2} &= \sin m(\Delta \omega t + \pi) \\
&= \sin m \Delta \omega t \cos m \pi + \cos m \Delta \omega t \sin m \pi \\
&= (-1)^m \sin m \Delta \omega t
\end{aligned} \tag{III-6}$$

となる。(III-5) 式、(III-6) 式を (13) 式に代入すると  $n=2m$  の透過波は

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin \left[ \omega_0 + \frac{(2m-1)\Delta \omega}{2} \right] t \sin m \Delta \omega t}{\sin \frac{\Delta \omega}{2}} + \frac{(-1)^{2m} \cos \left[ \omega_0 + \frac{(2m-1)\Delta \omega}{2} \right] t \sin m \Delta \omega t}{\cos \frac{\Delta \omega}{2}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin(\omega_0 + m\Delta\omega)t \sin m\Delta\omega t}{\sin \Delta\omega t} \\
&= \frac{\sin\left(\omega_0 + \frac{n\Delta\omega}{2}\right)t \sin \frac{n\Delta\omega t}{2}}{\sin \Delta\omega t}
\end{aligned} \tag{III-7}$$

となる。

次に(16)式の回折波の計算を行う。此処で  $n=2m+1$  の回折波は、(Ⅲ-2)及び(Ⅲ-3)はそのまま使用できる。従って得られる結果は

$$\frac{\sin(\omega_0 + m\Delta\omega)t \sin m\Delta\omega t}{\sin \Delta\omega t} = \frac{2 \sin\left[\omega_0 + \frac{(n-1)\Delta\omega}{2}\right]t \sin\left(\frac{n-1}{2}\Delta\omega t\right)}{\sin \Delta\omega t} \tag{III-8}$$

となる。同様に  $n=2m$  の場合 (Ⅲ-5) 及び (Ⅲ-6) 式をそのまま使用して、

$$\frac{\sin[\omega_0 + (m-1)\Delta\omega]t \sin m\Delta\omega t}{\sin \Delta\omega t} = \frac{2 \sin\left[\omega_0 + \frac{(n-2)\Delta\omega}{2}\right]t \sin \frac{n\Delta\omega t}{2}}{\sin \Delta\omega t} \tag{III-9}$$

が得られる。

#### 付録Ⅳ

$$\begin{aligned}
&2^{n-1} \prod_{r=1}^n \sin\left(\theta + \frac{r-1}{n}\pi\right) \\
&= 2^{n-1} \prod_{r=1}^n \frac{1}{2i} \cdot \left\{ e^{i\left(\theta + \frac{r-1}{n}\pi\right)} - e^{-i\left(\theta + \frac{r-1}{n}\pi\right)} \right\} \\
&= 2^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2i}\right)^n \cdot \left( e^{-i\frac{n-1}{2}\pi} \cdot e^{-in\theta} \right) \cdot \prod_{r=1}^n (\omega_{r-1} \cdot e^{i2\theta} - 1) \\
&= (-1)^{n-1} \cdot e^{-in\theta} \cdot \left(\frac{1}{2i}\right) \cdot \left\{ \Omega_n \cdot (e^{i2\theta})^n + \Omega_{n-1} \cdot (e^{i2\theta})^{n-1} + \cdots \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{n-1} \cdot \Omega_1 \cdot (e^{i2\theta}) + (-1)^n \right\}
\end{aligned} \tag{IV-1}$$

ここで  $\sqrt{-1} = i$  とする。1 の  $n$  乗根を

$$\omega_s = (e^{i2\theta})^{\frac{s}{n}} = (1)^{\frac{s}{n}} \quad (0 \leq s \leq n-1) \tag{IV-2}$$

と表わすと、(IV-2)を使って、 $x_n - 1$  は因数分解されて、

$$\begin{aligned}
x_n - 1 &= (x - \omega_0)(x - \omega_1) \cdots (x - \omega_{n-1}) \\
&= x^n + (-1)^1 \Omega_1 x^{n-1} + (-1)^2 \Omega_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} \Omega_{n-1} x + (-1)^n \Omega_n
\end{aligned}$$

と展開される。ここで

$$\Omega_s = \sum_{0 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq n-1} \omega_{j_1} \cdot \omega_{j_2} \cdots \omega_{j_s}, \quad (1 \leq s \leq n-1) \tag{IV-3}$$

である。上式の係数比較から

$$\Omega_s = 0 \quad (1 \leq s \leq n-1) \quad (\text{IV-4})$$

$$\Omega_n = (-1)^{n+1} \quad (\text{IV-5})$$

が得られる。従って(IV-2), (IV-3), (IV-4), (IV-5)式を用いて、(IV-1)式は

$$\begin{aligned} &= (-1)^{n-1} \cdot \frac{e^{-in\theta}}{2i} \cdot \{(-1)^{n+1} \cdot e^{i2n\theta} + (-1)^n\} \\ &= (-1)^{n-1+n+1} \cdot \frac{e^{-in\theta}}{2i} \cdot (e^{i2n\theta} - 1) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) \\ &= \sin n\theta \end{aligned}$$

となる。

## References

- [1] Kato, N. & Lang, A. R. (1959) *Acta Crystagrallogr.* **12** 787-794
- [2] Saka, T. & Kato, N. (1986) *A42* 469-478
- [3] Duckett, R. A. & Lang, A. R., (1973) *J. Cryst. Growth* **18** 135-142
- [4] Lang, A. R. & Mai, Z. H. (1979) *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **368** 313-329
- [5] Takama, T., Tsuchiya, K., Kobayashi, K. & Sato, S. (1990) *Acta Cryst.* **A46** 514-517
- [6] Zarka, A. (1969) *Bull. Soc. Fr. Mineral Cristallogr.* **92** 160-171
- [7] Takama, T., Kobayashi, K. & Sato, S. (1982a) *Transaction Jpn In Metals* **23** 153-160
- [8] Takama, T. & Sato, S. (1982b) *Phil. Mag.* **45** 615-626
- [9] Takama, T., Kobayashi, K., Hyugaji, M. Nittono, O. & Sato, S. (1984) *Jpn. J. Appl. Phys.* **23** 11-14
- [10] Kobayashi, K., Takama, T., Tohno, S. & Sato, S. (1988) *Jpn. J. Appl. Phys.* **27** 1793-1797
- [11] M. Yoshizawa, T. Kawamura, K. Ehara, H. Sugawara, T. Nakajima, T. Fukamachi and K. Hayakawa. (1986) *Photon Factory Activity Report* #6 p. 161 (ed. by N. Sakabe et al.)
- [12] M. Yoshizawa, T. Kawamura, K. Ehara, T. Nakajima, H. Sugawara, T. Fukamachi and K. Hayakawa. (1986) *Acta Cryst.* **A43** Suppl. C262 15.4-2.
- [13] Yoshizawa, M. (1996). *Determination of atomic scattering factor by using Poedelloesung beatnear Ga K-absorption edge* (Doctor thesis, Univ. of Tokyo).
- [14] K. Kobayashi, T. Takama and S. Sato, (1981) *Jpn. J. Appl. Phys.* **27** 1377
- [15] T. Takama and S. Sato, (1981) *Jpn. J. Appl. Phys.* **20** 1183
- [16] T. Nakajima, (2002) *J. Low Temp. Phys.* **128** 9
- [17] R. L. Moessbauer: *Z. Physik* **151** 124 (1957), *Naturwissenschaften* **45** 538 (1958)
- [18] R. H. Herber: *McGraw-Hill Encyclopedia of Physics* 814 ed. by S. P. Parker (McGraw-Hill Inc., New York etc. 1993)
- [19] W. M. Visscher, *Ann. Phys.* **9** 144 (1960)
- [20] J. van Kranendonk: *Proc. VIIIth Intern. Con. Low Temp. Phys.* Vol. **9-20**, 9 G. M. Graham and A. C. Hollis Hellet (eds.), Univ. Tront Press (1961)
- [21] R. L. Moessbauer and D. H. Sharp: *Rev. Mod. Phys.* **36** 410 (1964)
- [22] S. Miyake: *Diffraction of X-rays* p. 149 (Asakura-shoten, Tokyo, 1969)
- [23] M. Yoshizawa, private communication
- [24] P. A. M. Dirac: "**3. Interference of photons**" in "*The Principles of Quantum Mechanics*" (Oxford at the ClarendonPress, 1958)
- [25] K. A. Gschneidner: *Physical Properties and Interrelationship in Solid State Physics* **16** 368 (ed. by F. Seitz and D. Turnbull, Academic Press, New York & London, 1964)
- [26] R. M. Nicklow & R. A. Young: *Phys. Rev.* **152** 591 (1966)

## Figure captions

**第一図** Si(220), (440) の等厚干渉縞のトポグラフィ<sup>1</sup>(上図)と Si(660) も加えた計測パターン<sup>2</sup>(下図)。

**第二図** 原子量 ( $M_a = 0.004\text{kg}(\text{He}), 0.012\text{kg}(\text{C}), 0.072\text{kg}(\text{Ge}), 0.100\text{kg}, 0.200\text{kg}$ ) の自由原子の反跳エネルギー  $E_R$  の X-線エネルギー  $E_0$  依存性。PB は abcd ( $0.012 \leq Ma \leq 0.072, 10\text{keV} \leq E_0 \leq 60\text{keV}$ ) の範囲で観測されている。(log-log plot)

**第三図** 温度 88K の吸収体結晶  $^{191}\text{Ir}$  の有効吸収断面積の線源温度依存性。データは文献[17の前者]，理論曲線は文献[19]を参照。(Ir のデバイ温度は室温で 228K，絶対零度で 425K と例外的に大きく変化している[25]。この温度変化も反跳を助長していると思われる。)

**第四図** 格子間隔  $d_{hkl}$  の結晶面に、単一光子がブラッグ角  $\theta_B$  で入射し、出射したときの X-線多重反射の模式図。

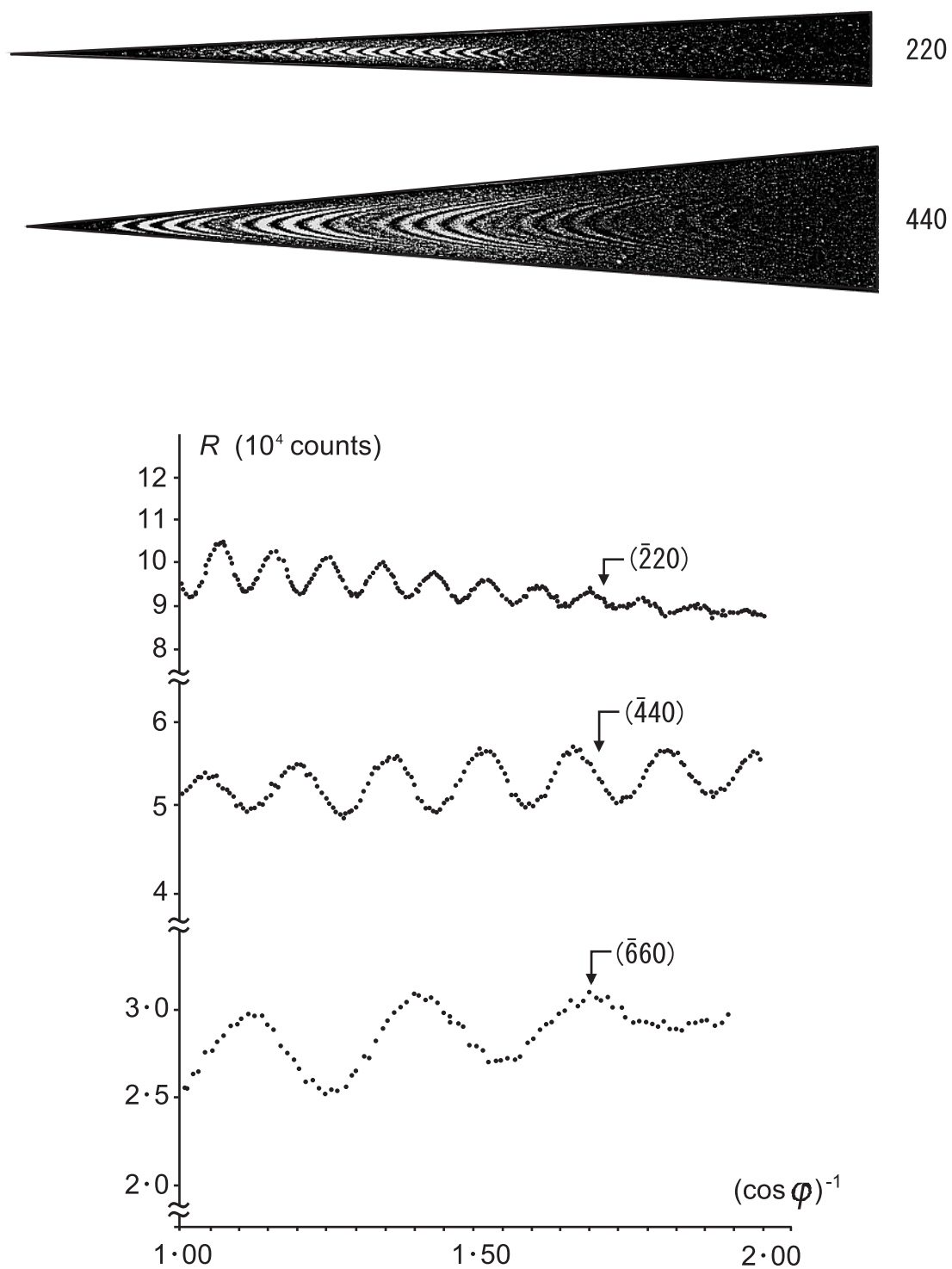
**第五図** 格子間隔  $d_{hkl}$  の結晶面に、単一光子がブラッグの条件で入射したとき、入射方向と回折方向の反射が同等に起こるとしたとき生じるラウエ・ケースの多重反射。(図は五重反射)

**第六図** (20)式の  $r=1$  から 10 までの多重乗積による正弦波(A)と(22)式に対応する  $r=2$  から 10 までの多重乗積による振幅変調された波(B)の  $0^\circ \leq \Delta\omega t \leq 180^\circ$  での変化。

**第七図** (22)式で  $l=19$ (上図)と 20(下図)の多重乗積の  $-25^\circ \leq \Delta\omega t \leq 385^\circ$  での変化

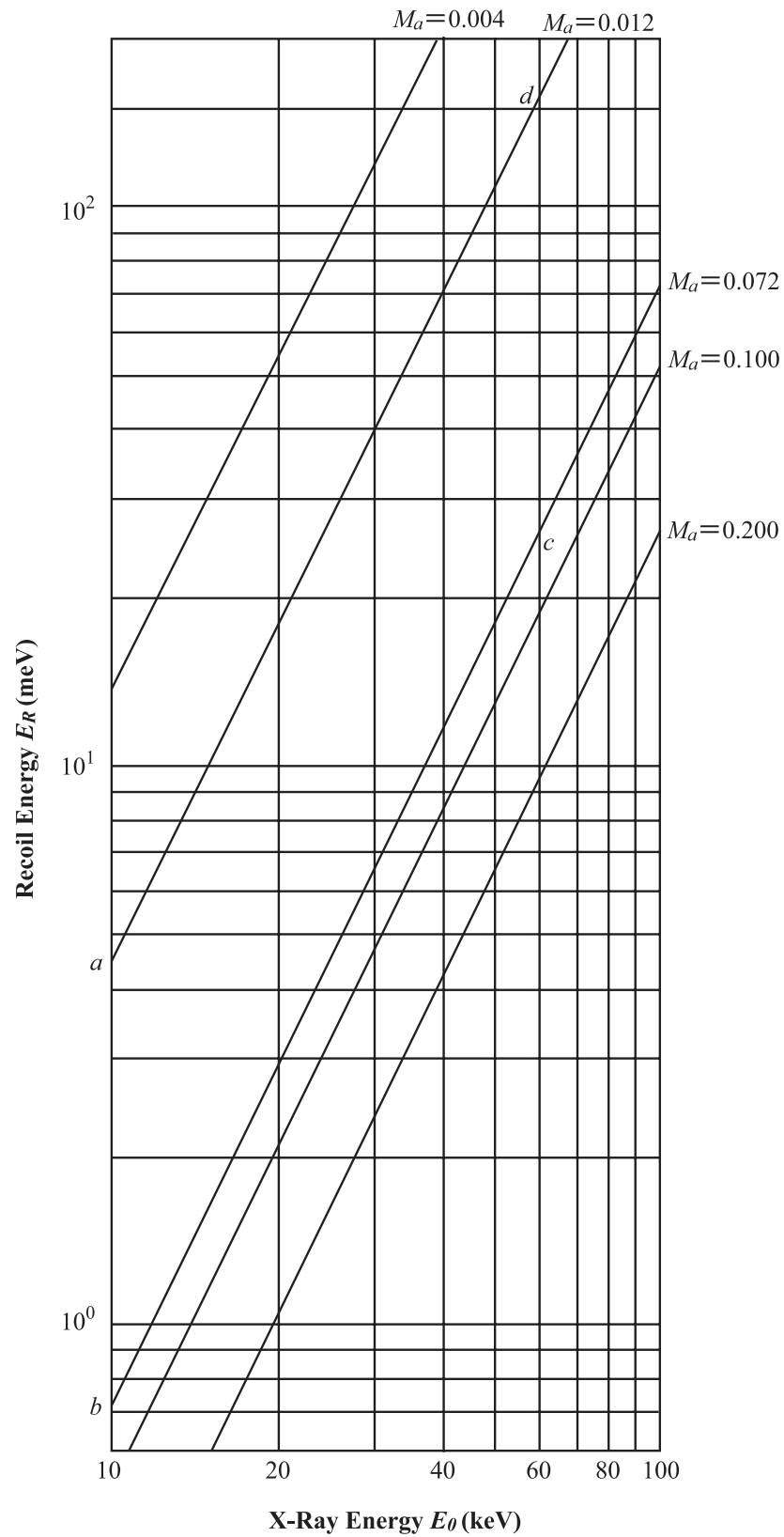
**第八図** Si220 のペンデルレーズング・ビートの 300K と 573K の光子計数のパターン

**第九図** Al(h00)( $h=2, 4, 6, 8, 10$ ) のブラッグ反射強度の温度依存性

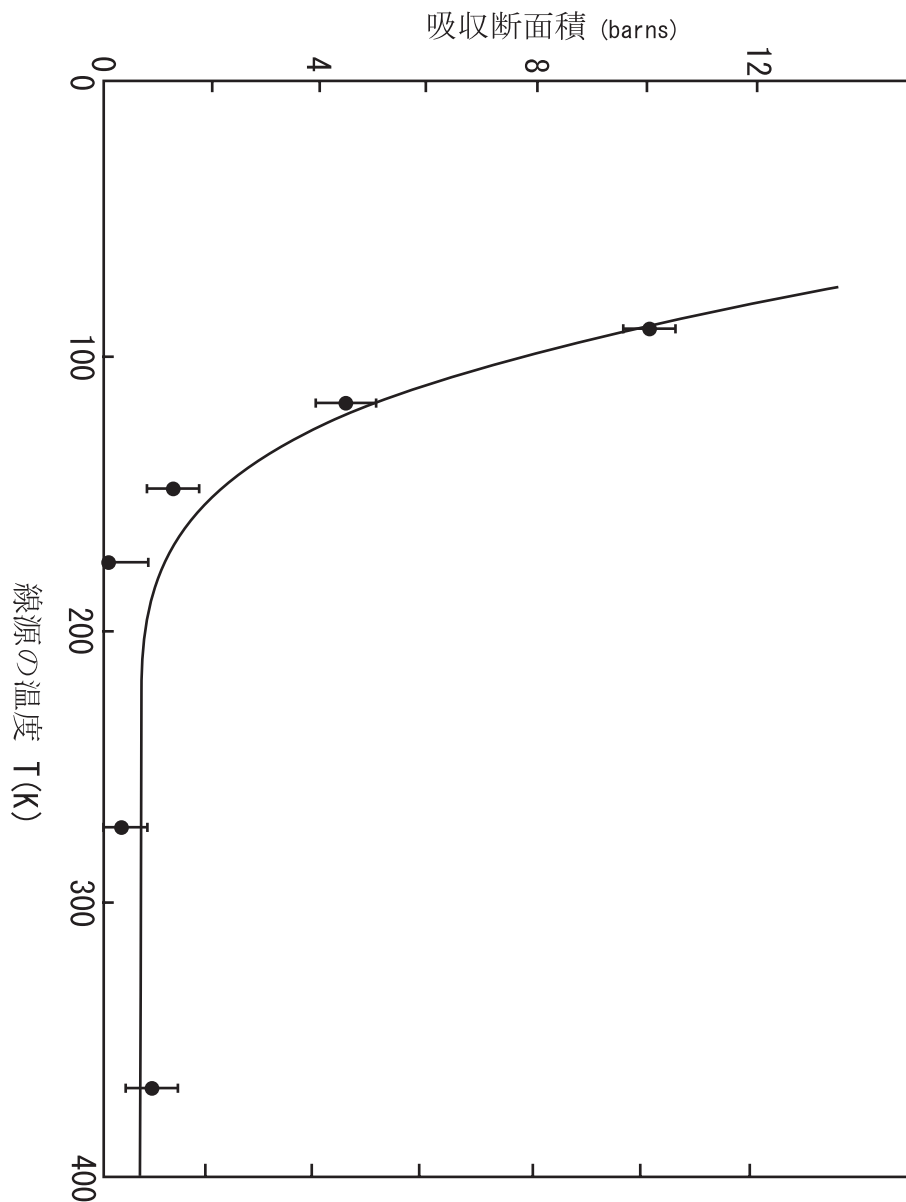


第一図 Si(220), (440) の等厚干渉縞のトポグラフィ<sup>1</sup>(上図)と Si(660) も加えた計測パターン<sup>2</sup>(下図)。

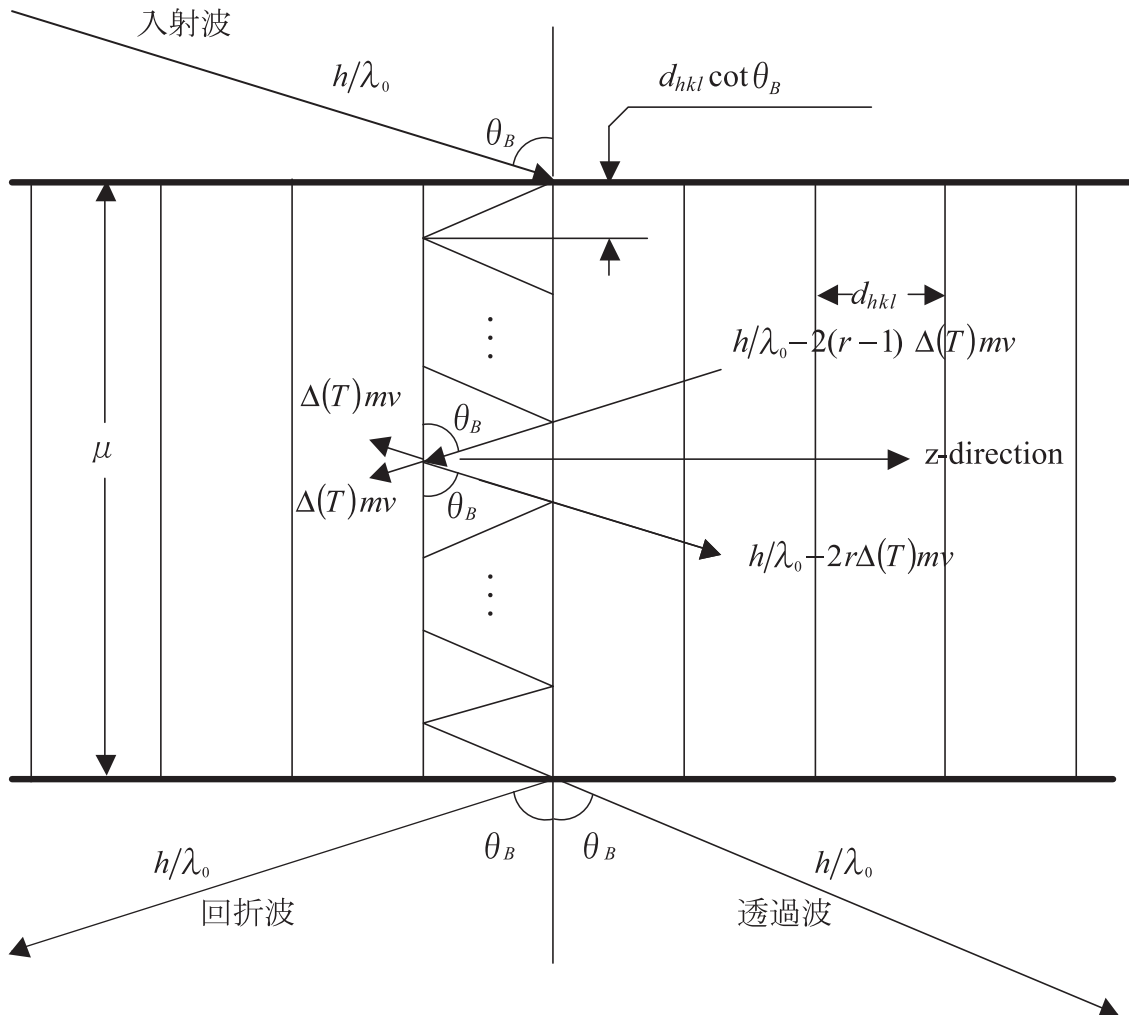




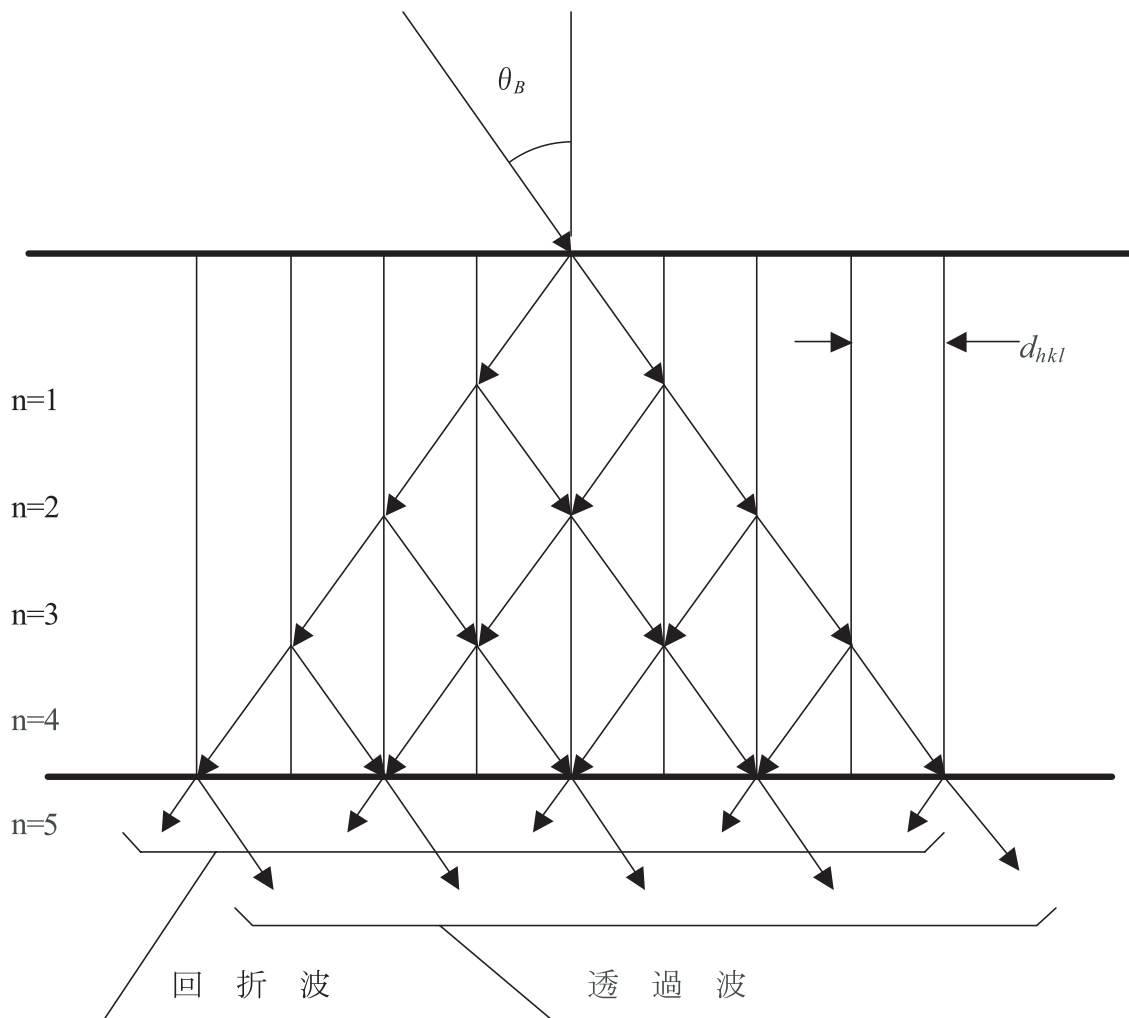
**第二図** 原子量 ( $M_a = 0.004$ kg(He), 0.012kg (C), 0.072kg (Ge), 0.100kg, 0.200kg) の自由原子の反跳エネルギー  $E_R$  の X-線エネルギー  $E_0$  依存性。PB は abcd ( $0.012\text{kg} \leq M_a \leq 0.072\text{kg}$ ,  $10\text{keV} \leq E_0 \leq 60\text{keV}$ ) の範囲で観測されている。(log-log plot)



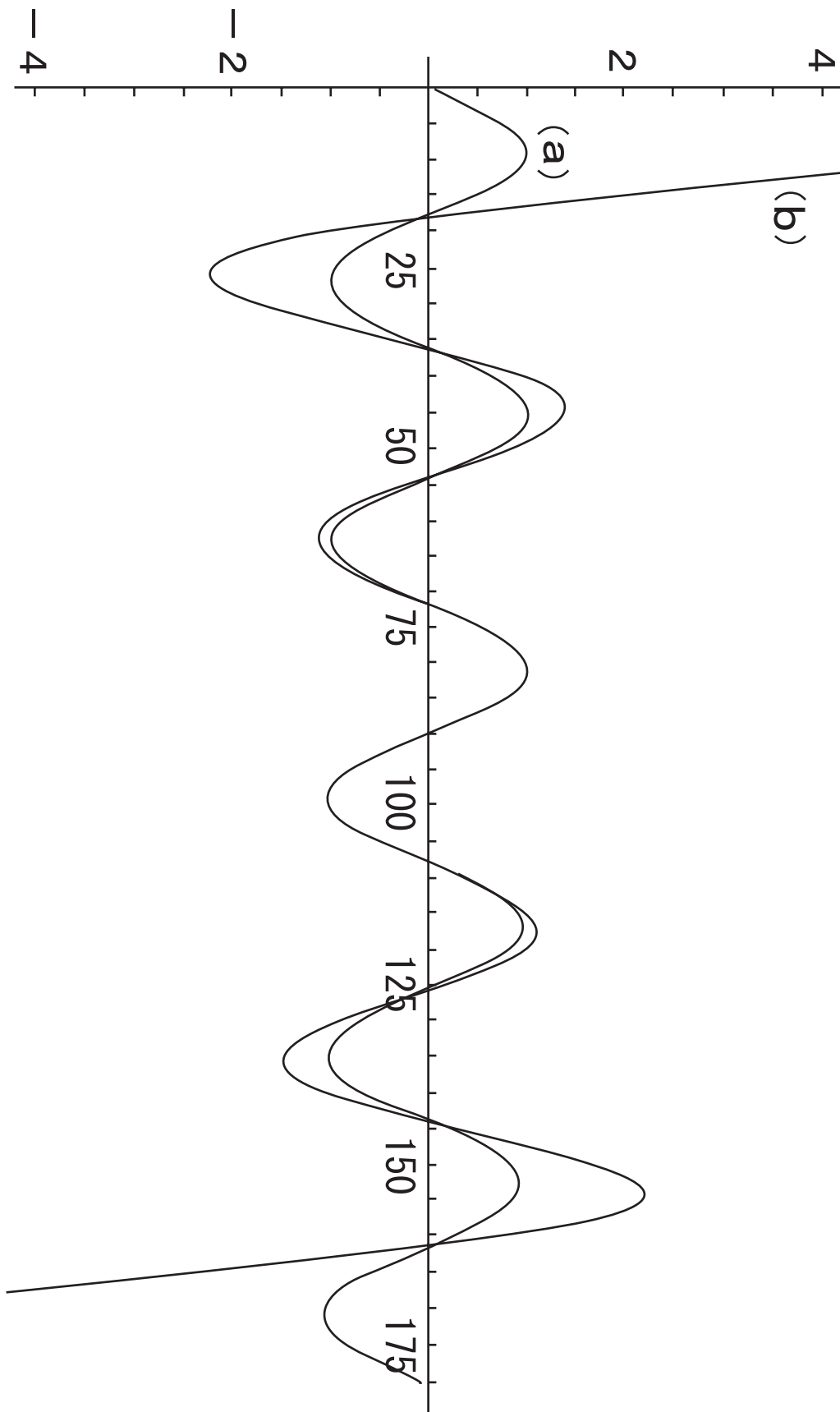
**第三図** 温度 88K の吸収体結晶  $^{191}\text{Ir}$  の有効吸収断面積の線源温度依存性。データは文献[17の前者], 理論曲線は文献[19]を参照。(Ir のデバイ温度は室温で 228K, 絶対零度で 425K と例外的に大きく変化している[25]。この温度変化も反跳を助長していると思われる。)



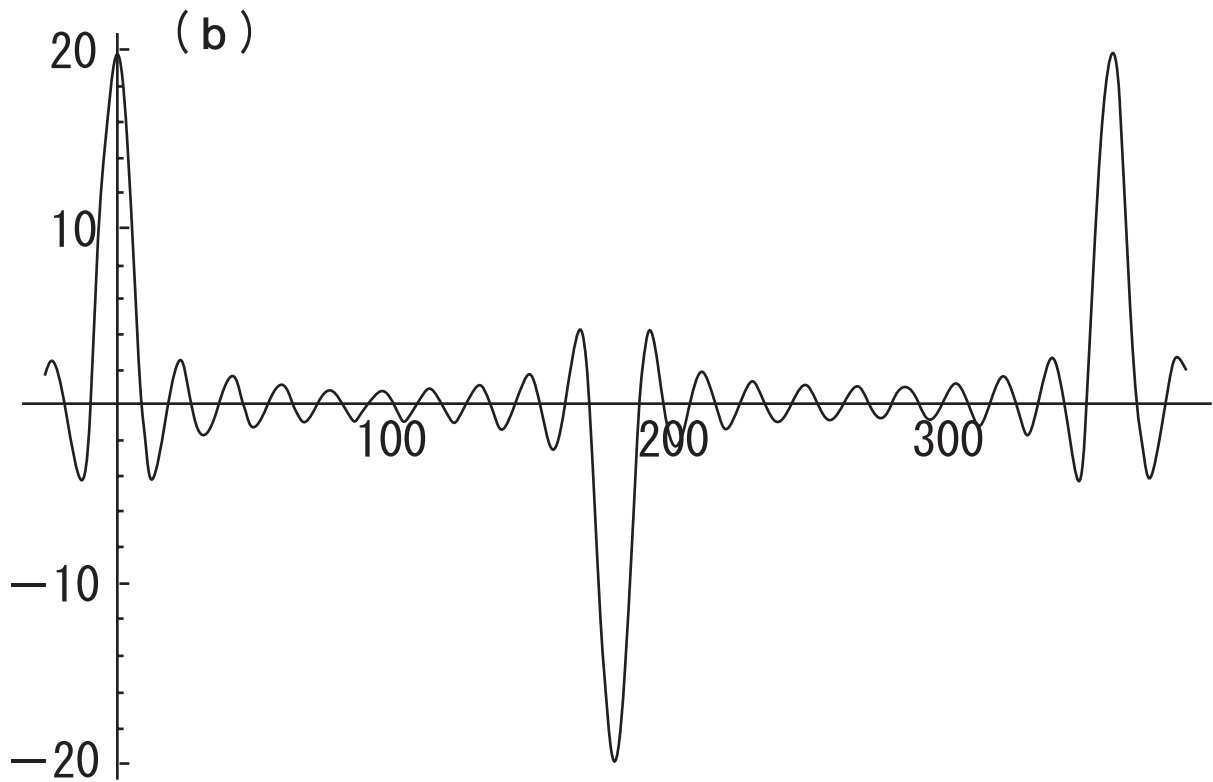
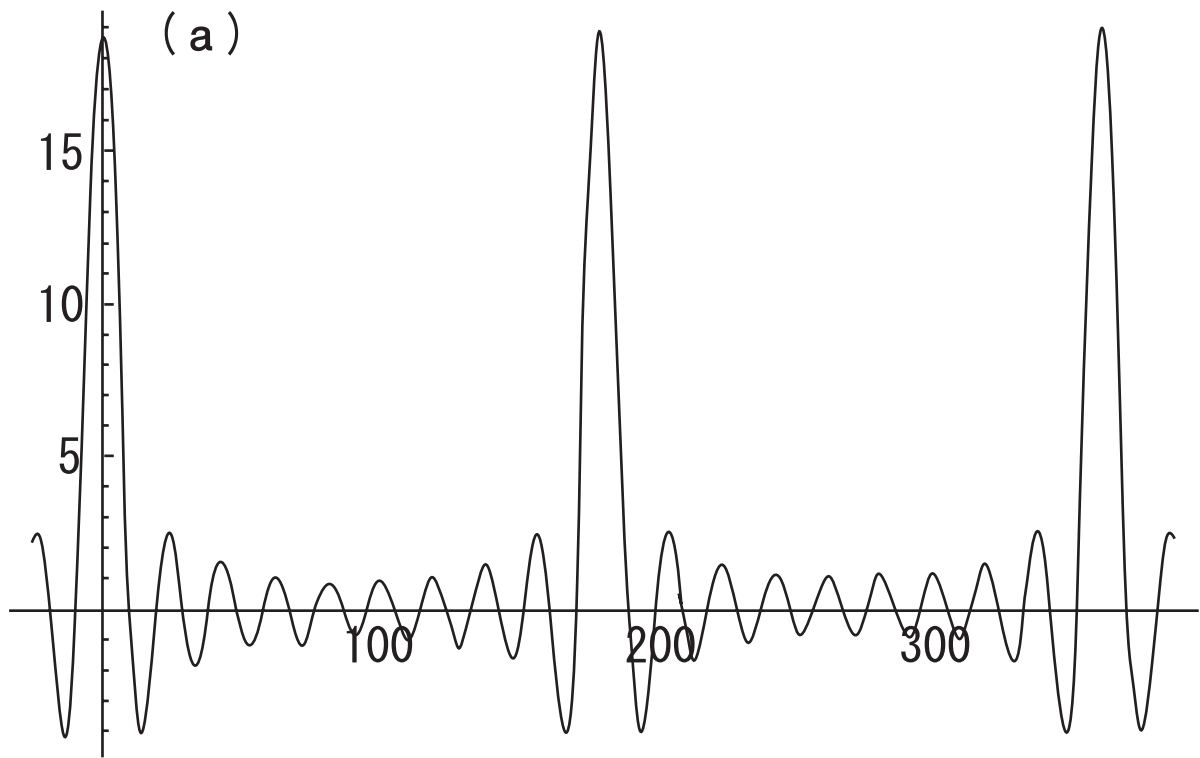
**第四図** 格子間隔  $d_{hkl}$  の結晶面に、単一光子がブラッグ角  $\theta_B$  で入射し、出射したときの X-線多重反射の模式図。



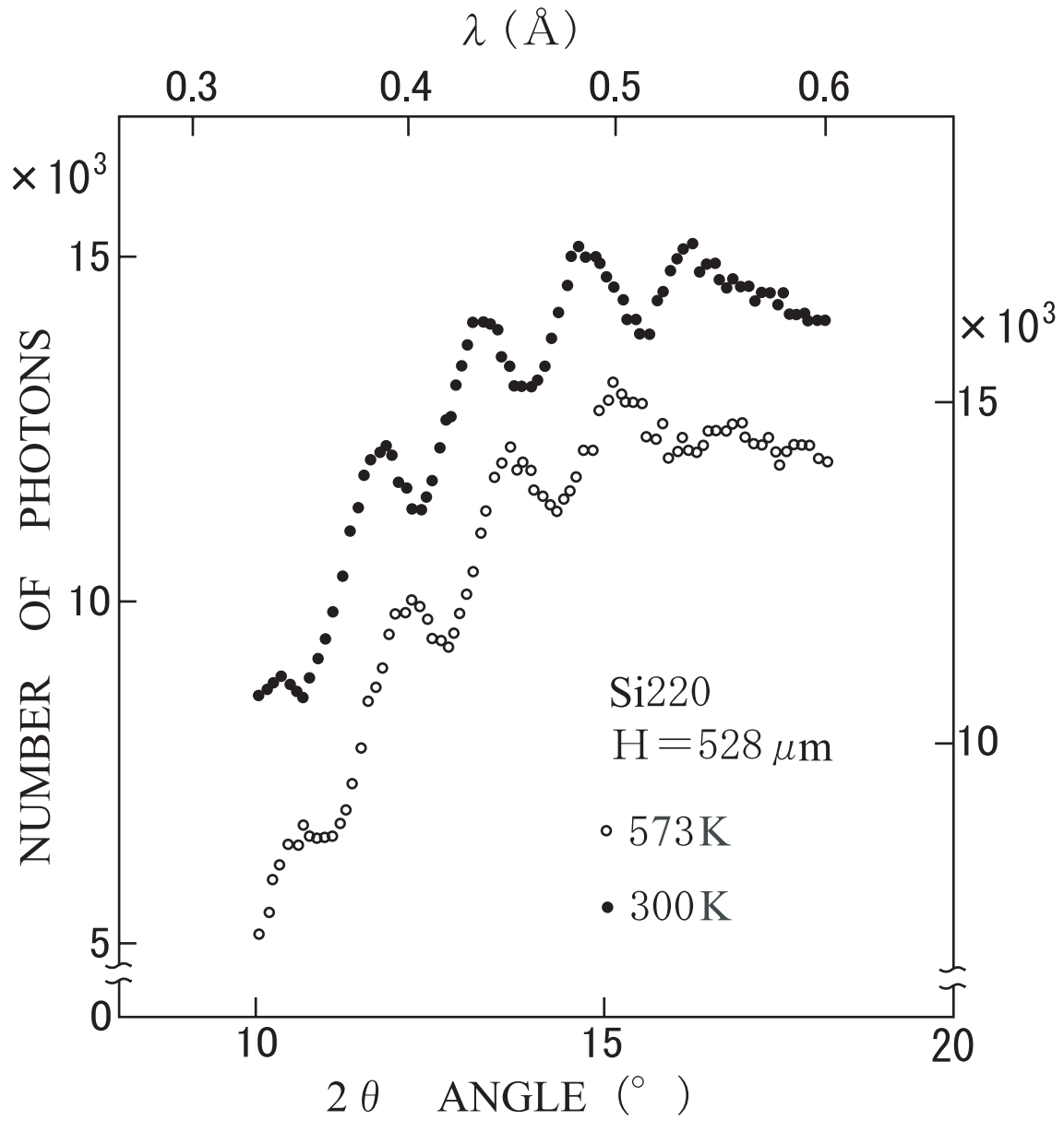
**第五図** 格子間隔  $d_{hkl}$  の結晶面に、単一光子がブラッグの条件で入射したとき、入射方向と回折方向の反射が同等に起こるとしたとき生じるラウエ・ケースの多重反射。(図は五重反射)



**第六図** (20)式の  $r=1$  から10までの多重乗積による正弦波 (a) と (22)式に対応する  $r=2$  から10までの多重乗積による振幅変調された波 (b) の  $0^\circ \leq \Delta\omega t \leq 180^\circ$  での変化。

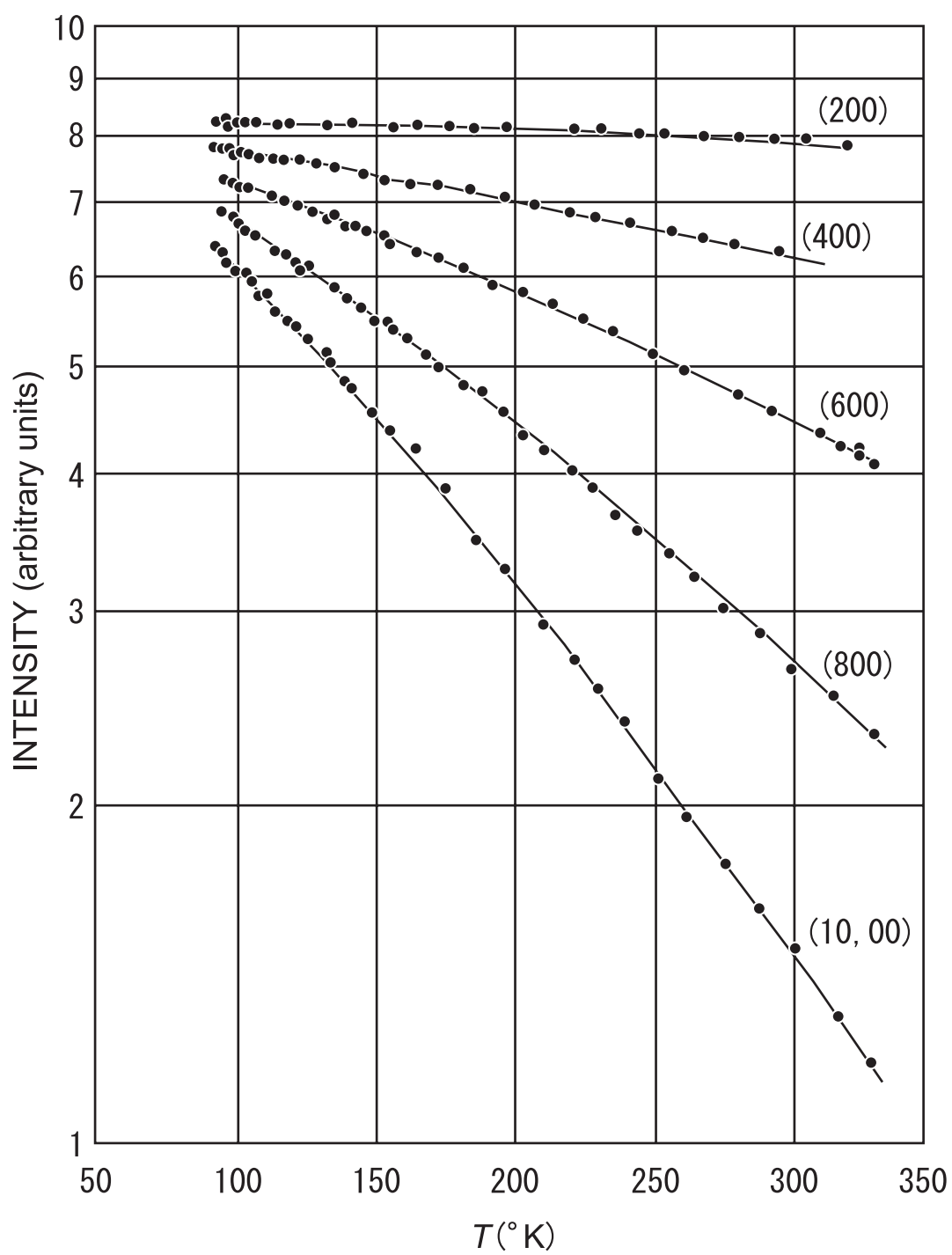


第七図 (22)式で  $l=19$  (a) と  $20$  (b) の多重乗積の  $-25^\circ \leq \Delta\omega t \leq 385^\circ$  での変化



第八図 Si220 のペンデルレーズング・ビートの 300K と 573K の光子計数のパターン





第九図  $\text{Al}(h00)$  ( $h=2, 4, 6, 8, 10$ ) のブラッグ反射強度の温度依存性

**英文タイトル**

Formation of the Pendellösung Beats Due to the Multiple Recoil X-ray Reflections and Proposal of Its Confirmatory Experiments

**英文要約**

Abstract: Pendellösung beats (hereafter, abbreviated as PB) in some light density crystals or elements have been observed by using comparatively hard X-rays at the room temperatures and/or above them. It means that the recoil energy loss plays essentially important role to produce PB from the shifts of the wavelength. It is newly indicated by using the new Bragg law introduced by the loss of the recoil momentum based upon the corpuscular character of light that superposition of the multiple reflected X-rays from 1 to  $n$  in multiplicity with the contracted wavelengths forms a new type of beat. It is one of the confirmatory experiments that, as a counter result of the Mössbauer effect, the integrated reflection intensity of PB fades away due to enhancement of the recoil-free reflections by lowering temperature of specimen, although that of the Bragg peak increases remarkably.

