アルゴリズム獲得を目指した「n 進記数法とは何か」の授業と評価

高橋哲男●メディアとソフトウェア

●**要約**

本稿は、情報科学の基礎である二進記数法を n 進記数法の原理とともに教えようとする授業プラン「n 進記数法とは何か」の教育内容・教材構成論、及びその実験授業による検証結果について論じている。大学生の多くは、十進数と二進数の相互変換の計算はできるが、なぜそれが正しい計算方法であるかを説明できる者はほとんどいない。これはそもそも、記数法の原理を理解していないためである。本プランは、n 進記数法の原理と基数変換計算のアルゴリズムを教えるという目的をもって作成された。またこの目的達成を通して、「答が合っていさえすればよい」といった数学観や学習観の虚しさに気づかせることもねらいとしている。本学一年生のインターネット論Ⅰにおいて実験授業を行ったところ、90%の受講生が記数法の原理と変換計算のアルゴリズムを獲得するに至った。このことから、本プランの教材構成は、n 進記数法の原理と基数変換計算のアルゴリズムを教えるという目的を果たすことが明らかになった。しかし一方で、情報科学の諸分野との関連のもとにより楽しい授業展開のなかで n 進記数法を教えるという課題が残された。

●**キーワード**

教育方法学
数学教育
実験授業
記数法
アルゴリズム

1　はじめに

二進記数法は情報科学の基礎である。基礎の基礎たるゆえんは、０と１というわずか二種類の自然数(1)を用いてすべての自然数を表現できること、そして、加法と乗法それぞれが、０と１の組み合わせであるわずか四通りの基本演算をもとにして構成されるという点にある。この性質がコンピュータにとって都合のよいものであることは述べるまでもない。

ところが、コンピュータにとって都合がよい二進記数法は、十進記数法に慣れている人間にとっても理解しやすく使いやすいもの、というわけではない。よく指摘される困難性は、十進記数法に比べて表示桁数が大きくなって扱いにくいという点であろうが、それもさることながら、その原因である「繰り上がりが最も頻繁に起こる」という、二進記数法の特殊性に目を向ける必要がある。０と１の四通りの基本加法のうち、加法単位元である０を含む三通りの加法は特殊なものと見ることができる。残る１＋１は、二進記数法の下では繰り上がりを生じて10となる。繰り上がりの概念は繰り上がりのない場合との対比において理解されると考えられるが、二進記数法の基本加法には、繰り上がりのない一般の計算が存在しないのである。

二進記数法理解の困難性をこのような二進独特の特殊性に求めるとすれば、困難の克服には、n 進記数法の原理を教え、何進記数法であっても適用可能な記数法変換のアルゴリズム形成をはかることが遠回りのようでいて実は近い道筋であると考えられる。本稿は、このような課題意識にもとづいて作成した授業プラン「n 進記数法とは何か」の教育内容・教材構成、及び実験授業によるその評価について論じるものである。

2　「n 進記数法とは何か」の必要性と評価方法

2.1　本プランの必要性

筆者が担当している一年生の授業「インターネット論Ⅰ」「インターネットリテラシーⅠ」において、記数法の変換が話題になる場面は主に二つある。第一には、IP アドレスの表記について説明する場面である。インターネットに接続されたコンピュータに割り振られる IP アドレスは、現在のところ32桁の二進数で表されている。通常はこれを８桁ずつ四つに区切り、それぞれを十進記数法に直した自然数の組として表示する。第二には、Web ページ作成において色の表現方法について解説する場面である。RGB 色体系では、赤・緑・青それぞれの色の強さを８ bit の情報で表し、その合成として色を表現する。８ bit は、十進記数法では０から255、十六進記数法では00から ff までの256通りの情報を表現することが可能である。

ところで、このような記数法の変換を人間が自分の手で行うことには、大した意味はないかもしれない。人間にとって理解しやすい四つの整数の組で表された IP アドレスを、わざわざ二進記数法で表現し直してみなければならない現実的な場面はほとんどないだろう。色を指定する場合にしても、真っ赤を表す「# ff0000」を「rgb(255, 0 , 0)」と書く方法もある。そして何より、二進数や十六進数に直す必要があるとしても、そのような計算はコンピュータがしてくれるという考え方もあるだろう。確かに、人間が手計算によって、特に速く正確に記数法の変換を行うことは無駄である。しかし、二進記数法なり十六進記数法なりの特性、あるいはもっと一般に n 進記数法の原理を知ることは無駄ではない。そのことによって、それらが情報科学の基礎となっていることを理解できるだろうし、ま

た、日常当たり前のように利用している人類の共有財産としての十進記数法の素晴らしさを再認識し、長い年月をかけてそれを発明するに至った人類の営みに思いを馳せることもできる。そして、記数法の原理を知ったとき、速く正確であるかはともかく計算もできるようになるであろう。この意味において、人間が記数法の変換を手計算で行うことの意義と本プランの必要性を見いだすことができる。

すでに大学一年生の多くは、十進数を二進数に変換する方法を知っている。十進数を 2 で割って商と余りを求め、商を再び 2 で割ってさらに商と余りを求めるということを繰り返し、出てきた余りを最後から順に並べるという簡便な方法である。しかし、なぜこの方法で二進数に正しく変換できるのかを説明できる学生はほとんどいないだろう。筆者が担当する「情報科教育法」（二年時履修）の授業で、十進数を二進数に変換する計算問題を出したところ、ほとんどの学生が 2 で割り進む方法によって正しい答を得ていた。しかし、この計算方法がなぜ正しいかを書かせたところ、計算原理を説明できた者はおらず、完全な白紙とほとんど白紙で降参状態の答案が約三分の一にのぼった。やがて高等学校の情報科教員となり、二進記数法を教えなければならない学生たちにしてこの有り様である。ある学生は書いている。「説明のしようがない。私は『このやり方で覚える事』としかいわれていない」。

不幸にも、「やり方だけ覚えていればよい、計算の答が合ってさえいればよい」という刹那主義的な教育を受けてきた結果なのだろう。しかし、このような教育をいつまでも続けていては、情報メディアに関わる自ら設定した課題を総合的に研究して巣立っていくような学生を育てることはできまい。本プランは、n 進記数法の原理を指導することを通じて、上の学生が書いたような不幸な学習観を転換させるというねらいを併せ持っている。この点にも本プランの意義がある。

2.2　本プランの評価方法

一般に自然科学においては、ある理論仮説の妥当性を検証するために実験が行われる。教育方法学では、ある授業プランの有効性を検証することを目的として行われる授業を実験授業とよぶ。有効性を検証するという場合、自然科学の実験をイメージするならば、差違がない集団と仮定する実験群と統制群をおいて実験群にのみ教育を施して、その結果を、何も教育しなかった統制群の結果と比較対照する方法が思い浮かぶ。しかし、教育方法学ではこのような実験をしない。検証を受けるべき授業プランは、少なくとも作成者にとって、何らかの有効性が確認できると確信されるものでなければならない。統制群の結果よりも「よい」結果になるのは当然であって、そのような結果になることを実験授業によらなければ示せないようなプランは、教育方法学の研究としてほとんど無意味な存在である。そしてなにより、何も教育しない統制群という子どもの集団を考えること自体、すべての学習者に対する質の高い教育の在り方を研究する教育方法学の思想に反している。

このような、実験群・統制群という考えに基づく比較対照実験の問題点については、すでに足立自朗が指摘しているところである。足立は、その上で、「問題は、教えればできるようになるかどうか、ではなくて、どのように教えれば子どもはよりよく学ぶか、である」と述べて、「異なった授業方法（X_a と X_b）のどちらがより効果的であるか」をみる方がより有意義であるとしている(2)。この方法は、二つの実験群それぞれに X_a, X_b を施して結果を比較するというものである。しかし、筆者はこの実験方法をも採らない。第一の理由は、X_a は有効性を検証する対象である「n 進記数法とは何か」であるが、その比較相手となる記数法に関わる授業 X_b は全国の大学や高校（あるいは中学校や小学

校にも）に無数に存在しているだろう。それらをことごとく収集することは不可能である。第二には、仮に無数の実践の収集が可能であり、すべての X_b よりも X_a の方が「よい」ということが示されたとしよう。そのとき、X_a よりも「よくない」無数の実験授業のための授業がなされていることになり、これも教育方法学の思想に反する。「よくない」ことを願うような授業を、教育研究に関わる者が行うべきではない。

以上のことから、実験授業は、本プランが他のプラン（あるいは何も教えないプラン）との比較において有効であることを示すのではなく、「n 進記数法とは何か」が学習者に対していかなる「よい」認識を形成し得たのか、その結果を知ることを目的として行う。もっとも、何が「よい」認識であるかを一般的な議論としてここで展開することは不可能であるが、「よい」認識のなかには最低でも、授業プランを作成する側が教授する価値を認める概念が含まれていなければならない。本プランでは、すでに述べたように、n 進記数法を原理的に理解すること、それを具体例として「アルゴリズムとは何か」を理解すること、さらに原理的理解を獲得することにより学習観の転換をはかること、などがある。また、結果をどのような形で抽出するべきかという課題についても、ほとんど何もわかっていない。記数法を変換する計算ができるようになったかどうかをテストし、その得点をもって結果とすることがよく行われる。だが、「n 進記数法とは何か」が素早く正確な計算ができるようになることを目指して作られていないことから、計算テストの実施はふさわしい抽出方法ではない。

本稿では、プランの評価を、学習者が使用したプリントおよび授業後に提出された感想文によって行う(3)。これらから科学的に導かれた結果を抽出する方法論はまだない。だが、この方法論は実験授業の結果を科学的に抽出してみようとする試みの積み上げなしには確立し得ない。本稿で用いる方法論もまた、教育方法学研究の対象として何らかの方法で検証を受けるべき存在である。

3 「n 進記数法とは何か」の教育内容・教材構成論

3.1 全体構成

「n 進記数法とは何か」は、全７章、Ａ４版用紙で表紙を含めて29頁からなっている。章節構成は以下の通りである。

１．十進記数法とは何か
　1.1　元になる十種類の数
　1.2　数字表記の変遷
　1.3　元になる十種類の数では表せない、一番小さな数
　1.4　一本にまとめよう
　1.5　「本の部屋」と「個の部屋」
　1.6　二桁の数
　1.7　十本で一枚にまとめよう
　1.8　個と本と枚の関係
　1.9　三桁の数
　1.10　十進記数法とは何か

２．七進記数法とは何か
　２．１　元になる七種類の数
　２．２　七進記数法の「本」と「枚」
　２．３　七進記数法の書き方と読み方
　２．４　七進記数法を十進記数法に直す
　２．５　練習問題
　２．６　十進記数法を七進記数法に直す
　２．７　練習問題
３．十六進記数法とは何か
　３．１　元になる十六種類の数
　３．２　十六進記数法の「本」と「枚」
　３．３　十六進記数法と十進記数法の相互変換
　３．４　練習問題
４．二進記数法とは何か
　４．１　元になる二種類の数
　４．２　二進記数法と十進記数法の相互変換
　４．３　練習問題
５．二進記数法の加法と乗法
　５．１　十進記数法の加法
　５．２　二進記数法の加法
　５．３　十進記数法の乗法
　５．４　二進記数法の乗法
　５．５　練習問題
６．情報科学の基礎としての n 進記数法
　６．１　二進記数法の加法と乗法
　６．２　二進記数法と IP アドレス
　６．３　十六進記数法と色の表現
　６．４　Mathematical Art「０と１のパスカル三角形」の謎
７．n 進記数法のすべて
　７．１　【問題】
　７．２　【質問】

記数法の指導は全国のいたる所で行われているだろうが、その指導法に関する論考はほとんどない(4)。以下では批判対象となる記数法指導のプランを特に想定せず、「n 進記数法とは何か」の教育内容・教材構成について論じる。

3.2　2で割り進む方法を教えない

n進記数法の原理を教えることを目指す場合、先に説明した十進数を2で割り進む計算方法が簡便であることを紹介し、しかる後にその原理の解説をするという指導の流れが考えられよう。本プランではこの計算方法を一切扱わないのであるが、その理由を後ほど説明するためにも、この計算方法によってなぜ正しく十進数を二進数に変換することが可能であるかを数学的に解明しておこう(5)。

定義　二進数$(a_p a_{p-1} \cdots a_0)$の値は、次の式によって表される。

$$(a_p a_{p-1} \cdots a_0) = a_p \cdot 2^p + a_{p-1} \cdot 2^{p-1} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0$$

定理　二進数$n = (a_t a_{t-1} \cdots a_0)$を2で割った商を$q$、余りを$r$とすると、

$$q = (a_t a_{t-1} \cdots a_1), \qquad r = a_0$$

が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned} n &= a_t \cdot 2^t + a_{t-1} \cdot 2^{t-1} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0 \\ &= 2(a_t \cdot 2^{t-1} + a_{t-1} \cdot 2^{t-2} + \cdots + a_1) + a_0 \\ &= 2(a_t a_{t-1} \cdots a_1) + a_0 \end{aligned}$$

今、この定理を用いて十進記数法の9を表す二進数を求めるとする。9を表す二進数を$a_t a_{t-1} \cdots a_1 a_0$とする。すなわち、

$$9 = (a_t a_{t-1} \cdots a_1 a_0)$$

この両辺を2で割ると

$$商\quad 4 = (a_t \cdots a_2 a_1) \qquad 余り\quad 1 = a_0$$

この商4をさらに2で割ると

$$商\quad 2 = (a_t \cdots a_2) \qquad 余り\quad 0 = a_1$$

この商2をさらに2で割ると

$$商\quad 1 = (a_t \cdots a_3) \qquad 余り\quad 0 = a_2$$

この商1をさらに2で割ると

$$商\quad 0 = (a_t \cdots a_4) \qquad 余り\quad 1 = a_3$$

ここまでくれば、

$$a_t \cdots a_4 = 0$$

は明らか。よって、

$$9 = (0 \cdots 01001)$$

あるいは簡単に

$$9 = (1001)$$

2で割り進み余りを逆に並べるという計算方法は簡単であるが、その計算原理を理解させようとすれば、これだけのことを説明しなければならない。特に困難なのは、$4 = (a_t \cdots a_2 a_1)$の部分である。$9 = (a_t a_{t-1} \cdots a_1 a_0)$のなかの$(a_t \cdots a_2 a_1)$は$2 \times (a_t \cdots a_2 a_1) = 8$を表しているが、$(a_t \cdots a_2 a_1)$だけになると4を表すというのは二進記数法の原理を獲得していない学習者にとっては難しいだろう。そしてなにより、二進記数法の定義が最初に出てくることは好ましくない。記数法の原理獲得が目標の一つである本プランにおいて、n進記数法の定義を理解して$n = 2$のときにも適用することはほとん

ど最終目標である。「２で割り進んだときの余りを並べれば、それが二進記数法の定義を満たすようになる」という指導順序は本末転倒なのである。

３．３　タイルを用いて十進記数法の原理を教える

十進記数法が記数法の一般原理を理解する上での最も優れたモデルであることに異論はあるまい。もっとも、「最も優れた」という根拠は、「十」という基数に求められるのではなく、それが最も普及している記数法であって誰もが十進記数法による数のなかで生活をし、教育を受けてきているという点に存在する。したがって、記数法の一般原理を獲得させせようとするとき、十進記数法の原理を教えてその普遍化をはかるという筋道をたどるのは自然な流れであろう。しかし、この際、「十進のことはすでに十分わかっているだろう」とは考えない方がよい。学習者が n 進記数法の原理の理解に困難を感じるとすれば、それはむしろ慣れ親しんできたはずの十進記数法のことをほとんど理解していないと見るべきだからである。十進のことが十分にわかっているような学習者ならば、n 進のことも容易に理解できるのである。

十進記数法の原理として確認しておくべき点は、以下の二点である。

１．０から９までの十種類の数を用いてすべての自然数を表現できること。
２．一が十集まると繰り上がりが発生する。繰り上がって新たに「一」となった十が再び十集まると繰り上がりが発生して新たな「一」となる。このような規則正しい繰り上がりのルールが存在すること。

結局は、

$$\cdots\cdots a_2\, a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \times 10^{i}), \qquad a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

という十進数 $\cdots\cdots a_2\, a_1\, a_0$ の定義が獲得されればよい(6)。具体的には、十進記数法の $234_{(10)}$ が、

$$234_{(10)} = 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

となる(7)。

指導の際には、自然数概念獲得のためのイメージとして最も有効であるタイル図を用いて、数の量的把握を目指す。また、繰り上がりを理解するために、一の位を「個」、十の位を「本」、百の位を「枚」と呼称し、１枚＝10^1本＝10^2個のような関係でとらえることにする。このようなアイディアは小学校の教科書で実現されており、新しさはない。そもそも十進記数法の原理は、累乗や積和の式は使わないにせよ、本来、おおむね三桁以上の数を学習する小学校の時点で理解していなければならないことである(8)。小学校と同様にタイル図や「個」「本」「枚」の考え方を用いて説明することは、大学生に対して「これならわかりそうだ」という安心感を与えられる反面、「馬鹿にするな」という反発を食らう原因ともなりかねない。誰でも理解できる易しさと大学生のプライドを傷つけない優しさの両面が必要になってくる。本プランでは、大学生向けである点を意識し、数字表記の歴史的変遷について紹介(9)したほか、ところどころに、記数法の本質に迫る次のような「生徒と先生の対話」を設け

た。

（234を「に・ひゃく・さん・じゅう・よん」と読むことを説明した後で）

生徒「そしたら、200は、に・ひゃく・れい・じゅう・れい、と読むのですか。」

先生「読んでもいい。」

生徒「そしたら、34は034と書いて、れい・ひゃく・さん・じゅう・よん、と読んでもいいのですか。」

先生「読んでもいい。」

生徒「そしたら、」

先生「それ以上は聞くな。」

ところで、$10^0 = 1$ということも必ず押さえておかなければならない内容である。累乗は中学校一年生の学習内容であるが、このとき、$2^3 = 6$ のような 2×3 との混同による誤りが多数発生する。計算テストの結果があるわけではないが、10^0についても10×0 との混同によって 0 であると誤って考える大学生も少なくないだろうと予想される。これは決して大学生が悪いわけではなく、中等教育段階までの数学教育が 0 乗の数を考える機会を与えてこなかったことに起因するといえる。中学校一年生で「2 を 3 個かけたものを2^3という」のように累乗を定義するが、ここでは 0 乗はもちろん 1 乗も、またすでに習っている負の数乗も考えられることはない。指数を 2 以上の整数にするという不合理な禁が解かれ、0 乗や 1 乗を含めて指数がすべての実数に拡張されるのは、高校の「数学Ⅱ」においてである。「数学Ⅱ」は高校数学の必修科目にはなっていない。

もちろん、0 乗や 1 乗は、「2 を 3 個かけたものを2^3という」とする累乗の定義からすると具体的イメージに乏しいため指導が難しい。$a^0 = 1$, $a^1 = a$ は規約的定義である。「数学Ⅱ」の教科書では正の（正確には 2 以上の）整数で成り立つ（であろう）指数法則 $a^{m+n} = a^m \times a^n$ の拡張で $a^0 = 1$ を教えている(10)が、これとてなぜ拡張しなければならないかを子どもにとって必然性のある理由をもって説明できない以上、単なる約束事になってしまう。$a^0 = 1$ をどう教えるかは指数関数をどう教えるかという解析学指導の大きな課題のなかの一つであろうが、「n 進記数法とは何か」では、以下のように説明することにした。

234 は、次のように表せる。

$$234 = 2 \times (\qquad\quad) + 3 \times (\qquad\quad) + 4 \times (\qquad\quad)$$

もう一歩進んで、次のようにも表せる。

$$234 = 2 \times 10^{(\quad)} + 3 \times 10^{(\quad)} + 4 \times (\qquad\quad)$$

4 のところだけ形が違うのはいやだ。

$$234 = 2 \times 10^{(\quad)} + 3 \times 10^{(\quad)} + 4 \times 10^{(\quad)}$$

ところで、二番目と三番目の式の最後を比べてみると、

$$10^0 = (\quad)$$

説明できないことは説明しないで、（　　）の中を学習者自身に埋めさせる。学習者が$10^0 = 1$ を選び取らざるを得ないように追い込んでいる。これもひとつの説明であろう。

3.4　n 進記数法の原理獲得のために七進記数法を扱う

情報科学の基礎としてn進記数法を教えようとする場合、十六進と二進を避けて通るわけにはいかない。教育する側は、十進記数法の原理がわかれば十六進も二進もそのアナロジーとして簡単に理解可能であると思いがちである。しかしながら、十進を教えた直後にこれらの進数へと進むのは時期尚早と思われる。いうまでもなく、十六進記数法ではＡからＦまでの文字が数を表すという点で十進にはない困難が伴う。また、冒頭で述べたように、二進記数法には繰り上がりのない一般の計算が存在しない。２個集まると繰り上がるという規則も、ある程度の量が集まったところで初めてひとまとめにしたいと考える、人間の心理に照らして不自然である。

「n進記数法とは何か」では、十進記数法の次に七進記数法を扱った。七進記数法を教えることにより、一般の記数法原理と比較したときに十進記数法では何が普遍性をもち（常に一定の基数が集まるごとに繰り上がりが発生する)、何が特殊性をもつのか（その基数が十であること）を考えさる。すなわち、十進と七進の同一性と差異性の両面を意識させることを通して、十進記数法の特殊性を一般の記数法原理に高めるねらいがある(11)。

「七」進である必然性はないが、十を超える記数では十六進と同様の困難が生じるし、小さすぎる記数では二進と同様に繰り上がりの必要性が感じられないため不適切である。また、十に近い九では、計算やタイル図描画の面で十進との非本質的な混乱の心配がある。また、基数は十や二と互いに素であるものが望ましい。これは、例えば五進数を選んだ場合、$111_{(10)}=421_{(5)}$が成り立つことから、「十進数を五進数に直すには、一の位をそのままに、十の位を二倍に、百の位を四倍にすればよい（ただし５以上の数が出てきたときは適宜繰り上げる)」のような誤った計算規則が獲得されてしまう危険性がある。この規則は十と五という基数同士の関係の特殊性からくるものであり、記数法の原理獲得を目指す立場からは無用な規則である(12)。以上のように考えると、「七」進であることがほとんど唯一の選択肢であるように思われる。

七進記数法の章で指導するべきことは、「０から６までの七種類の数を用いてすべての自然数を表現できること」、「七集まるごとに繰り上がりが発生すること」、及び、七進数から十進数への変換とその逆に関するアルゴリズムである。

4　実験授業の概要

「n進記数法とは何か」による授業を、本学一年生のインターネット論Ｉの時間に行った。授業者は講義担当者である筆者である。出席者はおよそ70名ほどであった。プリントは本来１頁ごとに配って授業をするのが理想的である。複数枚をまとめて配布すると授業展開を読まれてしまい、個々の解説や課題のねらいがプラン作成者の意図通りに伝わらない可能性があるからである。しかしながら、大人数を相手に１頁ごとプリントを配る時間的ロスを考えてそれを断念し、章ごとに綴じてその都度配布した。「５．二進記数法の加法と乗法」を終了した時点で、この授業が教育方法学研究の一環としての実験授業であることを説明した上で、授業の感想を自由に書いてもらい、回収した。その後、第６章と第７章の授業を行った。また、６章を除いた授業プリントについても回収した(13)。

以下では、授業プラン展開の鍵となるいくつかの問題や解説を中心に、それらのねらいと実験授業における受講生の様子を説明する。

４．１　「１．十進記数法とは何か」

「１．十進記数法とは何か」は、ほとんどが読み進めるだけの展開である。すでに知っているはずの内容であるため、テンポよく進めることが必要である。ここでは、十進記数法による自然数表記の原理をタイル図と記数法の定義式によって理解させれば十分である。プランでは、234を例として、図１のようなタイル図による表記と、

$$234 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

という記述を理解させた。個と本と枚の関係である「１枚＝10本＝100個（$=10^2$個）」も扱っておいた。第１章の内容については、もし準備が可能であれば各自に234個のタイルを与えて、「いくつあるかわかりやすいように並べてみよう」と問いかけるという展開も魅力的であった。これで、自然と図１の様に並べ替えられただろう。この問いかけをしておけば、次に説明する七進記数法での困難が多少回避できたと思われる。

なお、「200は、に・ひゃく・れい・じゅう・れい、と読むのですか」というあたりの先生と生徒の会話では、受講生から「おもしれー」という声が飛んだ。第１章全体としては、単なる小学校の復習と捉えられることはなく、大学生の立場からの記数法原理の再構築がなされた。

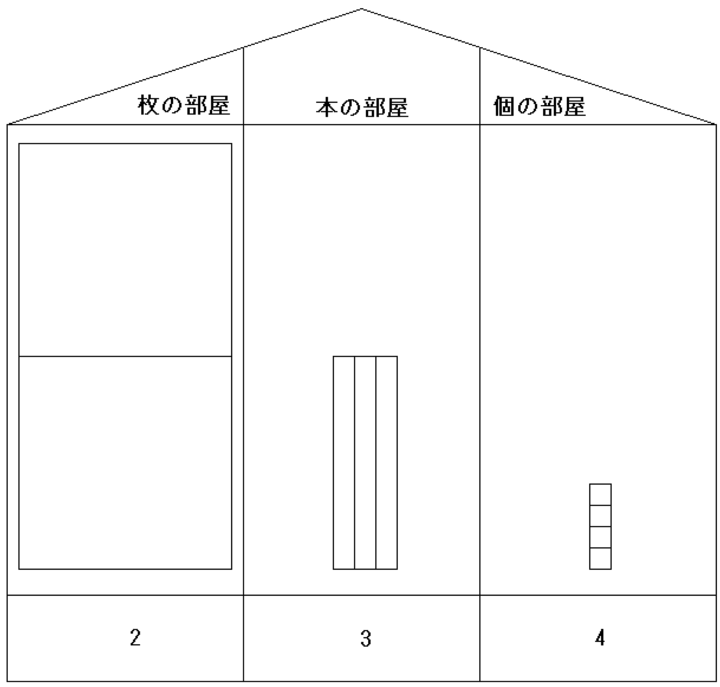

図１　$234_{(10)}$のタイル図

４．２　「２．七進記数法とは何か」

「２．七進記数法とは何か」では、まず、七進記数法では０から６までの七種類の数を用いてすべての数を表記することを説明する。そして、七集まるごとに繰り上がりが発生することから、個と本と枚の関係が「１枚＝７本＝49個（$=7^2$個）」になることを押さえておく。そこで、七進記数法の書き方（七進記数法における二枚と三本と四個のタイルがあるとき、$234_{(7)}$と書く）を説明した上で、七進数から十進数への変換方法を求めさせる。この変換方法は十進記数法との対比により簡単に見つ

けることができた。ここで変換の練習問題をいくつか与えて記数法原理の定着を図る。練習問題の中には$2345_{(7)}$という「枚」の次の桁があるものを入れておいたが、これについても正しく計算することができていた。

難しかったのは、十進数から七進数への変換である。七進と十進との同一性と差異性を認識し、n進記数法の原理獲得への高い階段を登らせるこの変換は、プラン全体を通しての最大の山場といえる。ここでは、図２のような十進記数法の234個のタイルを示した上で、これを七進記数法の枚と本と個を用いて表し、図３にタイル図として表現するようにさせた。七進記数法の枚が４、本が５、個が３取れることから、

$$234_{(10)} = 4 \times 7^2 + 5 \times 7^1 + 3 \times 7^0 = 453_{(7)}$$

とまとめる。４，５，３を導くアルゴリズムは、

$$234 = 4 \times 7^2 + 38$$
$$38 = 5 \times 7^1 + 3$$
$$3 = 3 \times 7^0 + 0$$

となる。

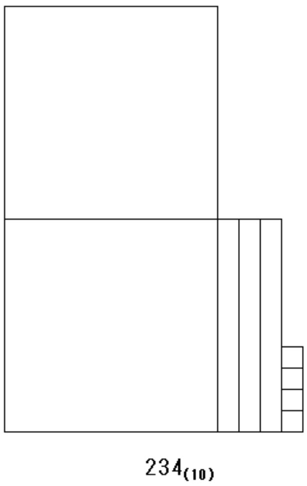

図２　$234_{(10)}$のタイル図

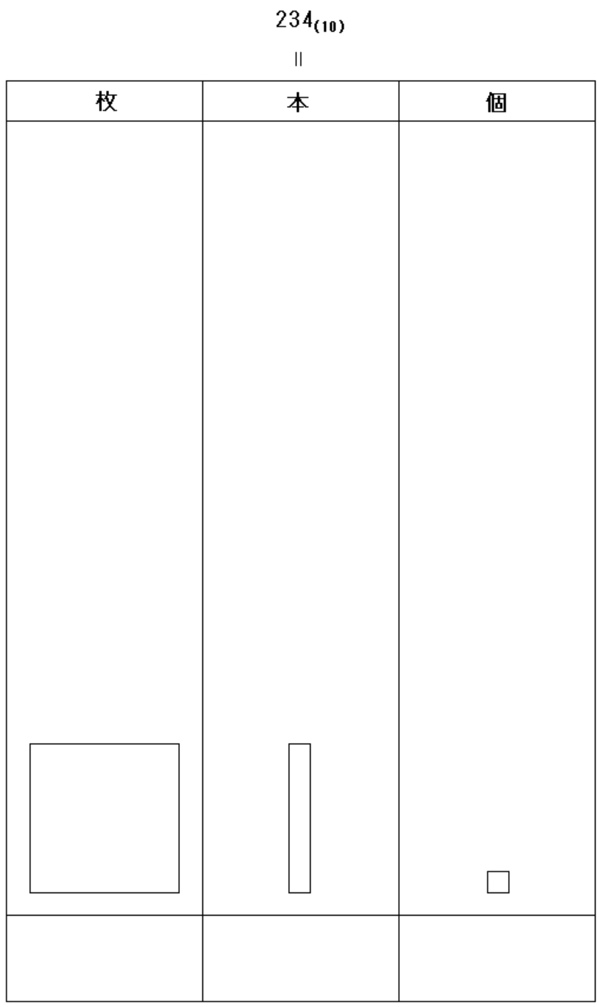

図３　$234_{(10)}$を七進記数法に直す問題

初め、七進記数法の枚と本と個を作るという意味がつかめず、何をすればいいのかわからない受講生が出たため、若干の解説が必要であった。先にも述べたように、実際に234個のタイルを与えて、手による操作で七進記数法の原理をつかませることが有効であっただろう。

この後で、十進数を七進数に直す練習問題に取り組ませた。練習問題を解く過程を見ることによって、十進数を七進数に直すアルゴリズム（それは七進記数法の原理の理解の上に形成される）が獲得されているかをある程度判断することができる。表１は、$453_{(7)}$のタイル図が正しく描画されているかと、十進数から七進数への変換の計算が正しくなされているかをクロスさせた集計結果である(14)。

表１　七進記数法のタイル図描画と十進→七進変換計算の関係

		十進→七進変換		
		できている	できていない	計
七進タイル図	できている	51	0	51
	できていない	13	6	19
	計	64	6	70

十進数から七進数への変換のアルゴリズムを獲得している受講生が70名中64名おり、比率では９割に達している。また、七進記数法のタイル図が正しく描けていれば、十進数から七進数への変換も確実にできるという結果が表れている。これは、自然数理解におけるタイル図によるイメージ形成の有効性という、これまでの数学教育研究のなかで明らかにされてきた事実が再確認されたことを示している。

タイル図が描けていないにもかかわらず計算のアルゴリズムが獲得されている13名については、タイル図を描く問題の意図がつかめなかったのかもしれない。しかし、結果として計算のアルゴリズムが獲得されていることから考えると、正しいタイル図の描画は可能であるだろう。タイル図も計算のアルゴリズムも「できていない」に分類される６名のうち２名は、まったくの白紙であり授業への参加を放棄したと考えられる。３名は「$234_{(10)} = 2 \times 7^2 + 3 \times 7^1 + 4 \times 7^0$」としており、直前の七進→十進への変換と混同したままであった。七進→十進への変換でも$234_{(7)}$を例題としていたため、再び同じ234を用いたのは不用意であったかもしれない。残る１名はタイル図を何も描かず、計算では「$121_{(10)} = 2 \times 7^2 + 3 \times 7^1 + 2 \times 7^0 = 232_{(7)}$」と正しい式のみを書いていた。２枚３本２個を見つけているので計算のアルゴリズムを獲得している可能性もあるが、周りの答案の丸写しの可能性もあるため「できていない」に分類している。

ところで、十進→七進への変換計算練習の最後の問題には「$432_{(10)}$」を入れておいた。$432_{(10)} = 1155_{(7)}$となるのだが、四桁の七進数が登場するのはこれが初めてである。例題では枚・本・個がそれぞれいくつ取れるかを考えてきたため、この問題でも最初に枚（49個）がいくつ取れるかを考えるために432÷49を実行して、結果$432_{(10)} = 855_{(7)}$とする受講生が少なくなかった。むろん、七進記数法で８が登場することはなくこの計算結果は誤りである。実験授業では、黒板に出てこの問題を解いた受講生がまず855と書き、周囲の指摘で1155に訂正した。この最初の誤りと修正は、プラン作成者のねらい通りの展開となった。回収した受講生のプリントには、「七進記数法なので８が出てくるのはおかしい」のようなメモ書きのあるものがいくつか見られた。この問題を通して、常に7^2がいくつ取れ

るかから考え始めるのではなく、$7^{n+1} > 423 \geqq 7^{n}$ なる 7^{n} がいくつ取れるかを考えなければならない、というアルゴリズムが形成される。

ただし、このアルゴリズム形成をさらに促進させるためには、7^2で割ると枚の位に10以上の数が立つような問題を出した方がよかっただろう。８でもよいが、二桁の数が立つことによって「何かおかしい」と気づく受講生が増え、「七進記数法なので７以上の数が出てくるのはおかしい」という本質的認識へと至ることも容易になったかもしれない。翻って考えれば、６問の練習問題のなかに本の位や個の位に０が立つものはあったが、枚の位が０になるものはなかった。そのような問題、例えば$45_{(10)}(=63_{(7)})$や$6_{(10)}(=6_{(7)})$などを、第四桁に数が立つ問題の前に入れておくべきであった。こうすることで、いつも枚から始まるわけではないことが認識されやすくなる。

4．3　「３．十六進記数法とは何か」

ここではまず基数が十六であり、十以降は A,B,C,D,E,F を用いて表記することを説明する。繰り上がりも十六ごとに起こることを説明し、十進数と十六進数の相互変換の練習をさせる。七進数を終えているので特に問題はないが、$F_{(16)} = 16_{(10)}$と勘違いをして計算をする誤りが多少見られた。

4．4　「４．二進記数法とは何か」

この章では、次の問題を出した。

二進記数法で書かれた数$10111_{(2)}$がある。この数を表すタイル図を、部屋ごとに描いてみよう。

？	？	枚	本	個
1	0	1	1	1

十進記数法で表された$10111_{(10)}$は、$1\times10^4 + 0\times10^3 + 1\times10^2 + 1\times10^1 + 1\times10^0$と表せた。

二進記数法で表された$10111^{(10)}$は、どう表せるだろう。

この問題では、二進記数法のアルゴリズムがタイル図のイメージを伴って獲得されているかを見ることができる。また、この問題の次には二進→十進への変換と十進→二進への変換の練習問題を置いた。七進記数法の場合と同様に、タイル図の描画と十進→二進変換計算についてのクロス集計をとると、以下の表になる。

表２　七進記数法のタイル図描画と十進→二進変換計算の関係

		十進→二進変換				
		できている	答のみ	２で割る	白紙	計
二進タイル図	できている	29	3	2	1	35
	１はすべて□	5	2	1	0	8
	不明	3	1	0	0	4
	白紙	6	3	2	4	15
	計	43	9	5	5	62

十進→二進変換計算に関して、「できている」とは、例えば$13_{(10)}$について、

$$13_{(10)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1101_{(2)}$$

あるいは

$$13_{(10)} = 8 + 4 + 1 = 1101_{(2)}$$

のように２のべき乗の和に直そうとしており、アルゴリズム獲得がなされていると考えられるものを表している。「答のみ」は$13_{(10)} = 1101_{(2)}$と結果のみが示されていて答に至る思考過程が不明なものを表し、「２で割る」は、13を２で割り続けて余りを逆に並べる機械的方法で答に至っているものを表している。一方、タイル図の描画に関して、「できている」とは、１が立っている位のタイルがほぼ相当する面積（16，４，２，１）をもって描かれているものを表し、「不明」はタイルの表す面積が16，４，２，１とはほど遠く、二進記数法の原理の量的イメージを伴った把握がなされいたかどうか判別不可能なものを表している。また、「１はすべて□」とは、図４に示すように１が立っている位のタイルがすべて等しい「個」に相当する面積で描かれているものを表している。

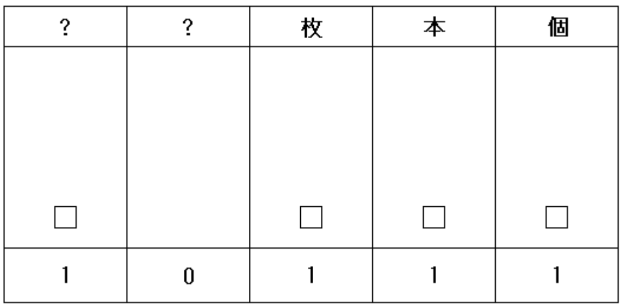

図４　「１はすべて□」のタイル図(1)

このような図を描いた受講生は、二進記数法の原理の量的イメージを伴った把握ができていないのであろうか。このタイプの図を描いた８名のうちの一人は、図５を描いている。

?	?	枚	本	個
16 $\boxed{2^4}$	8 $\boxed{2^3}$	4 $\boxed{2^2}$	2 $\boxed{2^1}$	1 $\boxed{2^0}$
1	0	1	1	1

図５　「１はすべて□」のタイル図(2)

決して、０である2^3の桁にもタイルがあることを問題にしたいわけではない。タイルを描いた上でそれがないのだと認識することもあってよい。ここでは、タイルの面積が数を表すという半具体的イメージを離れて、同じ「個」のタイルに異なる数を割り振るという段階に入っている。２のべき乗を併記していることから、量的に正しいタイル図を描かなくても、二進記数法の特質である２ごとの繰り上がりを認識できていると考えられる。逆に、認識できたからこそ面積のイメージが不要になったのである。「できるだけ具体的なものに基づいて教えよ」の原則が破綻するひとつの実例である。二進記数法に至ってもなおタイル図に頼ってきた教材構成論の問題点が、浮き彫りにされたといえる。

４．５　「５．二進記数法の加法と乗法」

十進記数法では、０の段を含めた「加法十十」と「乗法十十」の表が基礎となってすべての加法と乗法ができる。「５．二進記数法の加法と乗法」では、二進記数法での加法と乗法の基礎となる「加法二二」と「乗法二二」の表を作成してから、二進記数法での加法と乗法の計算練習問題を二問ずつ解いた。「加法二二」と「乗法二二」の表に表れる４つずつの演算によってすべての加法と乗法ができることから、二進数がコンピュータに適していることを実感してもらうことがねらいであった。時間が許すならば、七進記数法の「加法七七」「乗法七七」さらに十六進記数法の「加法十六十六」「乗法十六十六」の表を作成してから加法と乗法の計算問題を苦労しながら解くことが理想である。そうすることによって二進記数法の特殊性がより一層際だつこととなろう。

４．６　「６．情報科学の基礎としての *n* 進記数法」

この章では、二進記数法と IP アドレス、十六進記数法と色の表現について解説したほか、０と１のパスカル三角形の描き方を説明した(15)。この時期の他科目の教育内容との関連で言えば、chmod コマンドについて触れてもよかったかもしれない。

４．７　「７．*n* 進記数法のすべて」

ここではまず、次の問題を出した。

　十進記数法の94を、六進記数法に直してみよう。六進、です。
　計算のしかたを、中学生に説明するようなつもりで、タイル図を使いながら丁寧に書いてください。計算の結果だけを書くのはやめてください。

プリントのなかで扱わなかった六進記数法への変換ができるかどうか、しかもそれを他人に説明できるかを問うことによって、記数法の原理がタイル図の量的イメージを伴いながら獲得されているかを判断するねらいがある。

最後に、次の質問をしてプラン全体を締めくくっている。

今の気持ちに近いのは、［0］と［1］のどちらですか。丸をつけてください。

（　　）［0］．この授業で扱っていない六進記数法に直すことができた。時間をかけて考えながら落ち着いて計算すれば、たぶん、何進記数法にでも直すことができるだろう。

（　　）［1］．時間をかけても、できるとは限らないだろう。

この質問は記数法原理獲得の自信を問いかけるものである。本プランの評価に対する一つの目安となろう。

六進記数法への変換方法の説明と基数変換アルゴリズム獲得の自信に関するクロス集計の結果を次の表に示す。

表3　十進→六進変換の説明と「何進でもできる」自信の関係

		何進でもできる		
		できるだろう	できるとは限らない	計
十進→六進変換	できている	47	10	57
	できていない	2	4	6
	計	49	14	63

全63名のうちの約9割にあたる57名が、十進→六進の計算方法を正しく説明している。「正しく」の判断基準は、むろん、記数法の原理と計算のアルゴリズムが獲得されているかどうかにある。単純な計算にミスがあり答が違っていたとしても、「正しく」に含まれる場合もある。この9割という率は、七進タイル図を正しく描けていた受講生が約7割だったことと比べると、かなり高いと見るべきである。しかも、受講生がこの課題に取り組んだ際には、それまでのプリントを回収されていたという点を特筆する必要がある。受講生は、「n 進記数法とは何か」のプリントを見ることなく自分の力で記数法の原理を再確認しながら、授業では扱わなかった六進記数法への変換を説明してみせたのである。n 進記数法の原理を説明できるようにさせるという本プランの目的は、ほとんどすべての受講生に対して達成されたといえる。

「何進でもできる」という自信に関しては、「できるだろう」が約8割であり計算過程の説明と比べるとやや控え目な数値となっている。授業時間が許すならばもう少し計算練習問題を増やして、記数法やその変換計算に関する認識の定着をはかることも無駄ではなかったかもしれない。そうすれば、「何進でもできる」という自信ももう少し高まったと思われる。しかし、本プランは記数法の原理と基数変換アルゴリズム獲得までの最短経路を理論的に示したものであり、計算の習熟に重きを置いていない。計算問題を増やすことで、「計算ができればいいのだ」という好ましくない認識の形成を助長する可能性もある。このようなねらいのもとに展開した授業のなかで、「何進でもできるだろう」と回答したのが約8割という結果は、プラン作成者にとって不満のない数値である。

なお、変換の計算が「できていない」のに「何進でもできるだろう」と回答している受講生が2名

いる。いずれも、$94_{(10)}$を正しく２枚３本４個に分解している。１名のプリントには、「６ − １本、36 − １枚」という、繰り上がりに関する正しい理解を示す書き込みも見られる。しかしながら、両名ともさらにどういうわけか

$$6 \times 2^2 + 6 \times 3^1 + 6 \times 4^0$$

という計算を続けて$48_{(6)}$に至っている。七進記数法のところでは両名とも、タイル図の描画も十進→七進の変換計算もできていた。ここでは勘違いをしてしまったのであろう。

5　感想文の分析による「n 進記数法とは何か」の評価

5．1　分析の方法

実験授業では、「５．二進記数法の加法と乗法」が終了した時点で、受講生に、本プランに基づく授業に関して自由に感想文を書いてもらった。

感想文は、「つまらなかった」の一言で終わるものからＢ４版の用紙がほとんど埋まるほど記述してあるものまで多様である。これらの感想から、数学的認識の形成に関する理論の探究と本プラン改訂の具体的提言につながるような授業の評価を取り出すことは困難な作業であるが、ここでは、授業評価に関わるいくつかの項目を設定し、それらに関して個々の学生が肯定的(＋)・中立的(０)・否定的(−) いずれの判断をしているかを見ることにする(16)。感想文提出者は77名であった。分析結果を表にして示す。

表４　感想文の分析結果

	＋	０	−
Ａ.内容が理解できた	34	5	6
Ｂ.説明がわかりやすかった	23	0	7
Ｃ.授業全体が楽しい	19	3	17
Ｄ.仕組みやアルゴリズム獲得	13	4	0

項目「内容が理解できた」はプリントに込められた教育内容が理解できたと思うかどうかを表し、「わかった」や「理解できた」などの記述があるものを(＋)とし、その反対を(−)とする。「説明がわかりやすかった」は、プリントの解説や説明順序などがわかりやすかったかどうかを表す。「授業全体が楽しい」は授業に対する全体的印象を表し、「楽しかった」や「面白かった」のような記述が見られたものを(＋)とし、「つまらなかった」「楽しくなかった」などの記述が見られたものを(−)とする。「仕組みやアルゴリズム獲得」は、記数法の授業では基数の変換計算が中心課題になりやすいが、記数法の仕組みや計算のアルゴリズムを理解したと見られる記述があるものを(＋)とする。「内容が理解できた」との関連性が高いと考えられるが、本プランの中心的目標部分でもあるのでこの項目を独立して立て、仕組みやアルゴリズムに言及した記述を取り出すことにする。

なお、感想の中には「難しかった」という評価が数多く登場する。これは「難しくて理解できなかった」「難しくてわからなくて嫌だった」のようなネガティヴな評価の場合と、「難しかったが理解できた」「難しかったが結局はわかってよかった」のような達成感を伴うポジティヴな評価の場合が考えられる。同じように「簡単だった」も、「簡単でつまらなかった」と「簡単で理解がしやすく、安心

して学習に取り組めたのでよかった」のような両極端の評価の可能性がある。これらの記述に関しては、前後の文脈からいずれの意図かを判断することが可能な場合もあるが、かなりのケースでは困難である。主観性を可能な限り排除するため「難しかった」「簡単だった」のような記述は、授業評価に関わる各項目において(＋)(－)を判断する根拠からは除くことにした。

以上の各項目に関して、各受講生の肯定的(＋)・中立的(０)・否定的(－)の判断の根拠を示すことは難しい。ここではある学生の感想文と判断結果を述べるにとどめる。

> n 進記数法というものの存在は知っていましたが、実際に内容を学んだのは初めてで、かなり抵抗がある。計算をしているうちに、その意味や重要性は少しわかった気がした(Ｄ＋)。計算法方［ママ］については一通り理解できた(Ａ＋)が、仕組はまだ抽象的なイメージだ(Ｄ－)。正直、授業内容としては面白くはなかった(Ｃ－)。

以下、各項目別に代表的あるいは重要と思われる感想を紹介し、そのような記述がなされたことの教育方法学的意味について考察する。

5.2 教育内容の理解について

教育内容の理解について記述のあった受講生のうち、およそ四分の三が(＋)の評価をしている。本プランは、n 進記数法の原理をすべての受講生に理解させる目標をもって作成されている。すべての受講生の中には数学が苦手な者も含まれるが、本学では数学が得意だという学生の方が少数派であろう。このようななかで(＋)評価が四分の三にのぼったことは、n 進記数法を教える本プランの教育内容・教材構成が数学の苦手な学生にも理解可能なものになっていたことを、裏付けている。「今まで、二進数は全［ママ］々わからなかったけど、今回の授業で初めてわかった(Ａ＋)。わかりやすい授業だった(Ｂ＋)。数学は苦手だけど少しできるようになりそう」という感想から、本プランが数学が苦手な受講生にも受け入れられたことが読みとれる。

しかし、理解ができなかったという受講生もいないわけではない。「私は、高校の時に２進数やらをやったので、２進方［ママ］やらわ［ママ］解るのですが、計算はアリですか？　まじで、計算が入ると理解不能です(Ａ－)」。二進記数法の原理が理解できることとその計算ができることはほとんど表裏一体である。「計算が入ると理解不能」であればおそらく記数法も理解できていないはずで、「２進方やらわ解る」という認識自体が誤りであろう。本プランのどの部分から「理解不能」になったのか、またその改善策は何であるのかを究明することは、今後の課題である。

5.3 説明のわかりやすさについて

教育内容の理解についてと同様に説明のわかりやすさについても、記述のあった受講生の約四分の三が(＋)評価をしている。作成者はもともとわかりやすいプランを作成している自負があるため、この数値がいくら高くてもとりたてて喜ぶ必要はない。したがって、(＋)評価の代表的感想を取り上げる必要もなかろう。むしろ、わかりにくいと指摘した７名の(－)評価を見ることで、作成者の立てる記数法認識に関する仮説の可否が判断される。

とはいえ、「いまいちわかりにくかった(Ｂ－)」の一言で終わる感想をはじめとして、どこがわかりにくいかを具体的に記述した感想は少なく、プランの改訂に直接的につながる批判はあまりない。

少なくとも、十進記数法の原理を再確認し、そこから一気にn進へと進むのではなく、七進記数法を使って十進との同一性と差異性を意識させるという本プランの骨格部分に対する批判は見られなかった。この点については受講生の作文力との関連で論じるべきであるかもしれないが、本稿では追究できない課題である。具体的批判としては、「最後にやった2進数のかけ算がまったくもってわからなかったのが残念です。プリントに解説なんかがついてたらわかりやすくてよかったかもしれません(B－)」という指摘がある。これについては、実験授業において時間的余裕が少なく、説明を簡略化させてしまったという反省点が確かにある。ただし、より大きな問題は、教材構成論のところで指摘したとおり、他の進数での加法・乗法との対比を経てはじめて、二進数の加法・乗法の特殊性とその対コンピュータ親和性が理解されるという視点に欠けていた点にある。時間が許すならば、七進や十六進でも加法や乗法を行うべきであった。

5.4 授業全体の楽しさについて

授業全体の楽しさについては、(＋)評価と(－)評価がほぼ拮抗している。これは「教育内容の理解」や「説明のわかりやすさ」と比べると望ましくない結果となっている。板倉聖宣は、授業の成功失敗の基本的条件のひとつとして、「子どもたちの圧倒的多数が、この授業がわかるということ」の他に、「クラスの過半数の子どもがこの授業をおもしろい、たのしいということ —— 少なくとも「つまんない」「いやだ」という子どもが例外的にしかいないこと」をあげている(17)。圧倒的とは言えないかもしれないが、本プランは、多数の受講生にn進記数法の原理を理解させることに成功している。だが、楽しさについての(－)評価が17名という数は「例外的」とはいえない。板倉の示す条件は確かに高いハードルであるとはいえ、この第二の条件から見ると今回の授業は失敗だったと結論せざるを得ない。

どのような場合に、授業は楽しいと感じられるのか。もちろん、「授業がわかるということ」が重要なモーメントのひとつになるだろう。表4にはないデータであるが、授業全体の楽しさについて(＋)評価をした19名のうち、内容の理解についても(＋)評価をしている者が9名いた。しかし、内容の理解は必ずしも授業の楽しさにつながらない。次の二つの感想がそれを表している。

- ハイ、はっきりいってつまんないです(C－)。まぁないようはりかいできたと思う(A＋)。タイルかくのはだる〜いだけでした(C－)。
- 内容は理解できました(A＋)。後の方はちょっとあきてしまいました。テンポが遅くて時間を余ま[ママ]してしまったと思います(C－)。

楽しい授業を作り出すためには、授業者の話術からプリントの挿絵や使用フォントなどに至るまで大小様々なレベルでの吟味が必要であるが、それらは「何を教えるか」という教育内容論を抜きにした教育方法論であり、まったく無視していいというわけではないが、最優先して考慮すべき課題ではない。楽しい授業は、いかに取り組み甲斐のある課題や楽しい問題を出せるかどうかに、その多くを依存している。再び板倉によれば、「楽しい問題」とは、「①大部分の子どもやおとなたちが当然正しく考えることができなければならないはずなのに、②これまでの教育を受けてきた子どもやおとなたちでも、その多くがまちがった考え方をするような問題で、③しかもその問題の正しい考え方とまちがった考えの正否をみごとに示しうるような簡単な実験がある」(18)ということになる。もちろん、

板倉は「仮説実験授業」による自然科学教育を念頭に置いて述べているのであり、特に③の条件など、数学教育にそのまま適用するのは難しい面もある。本プランでは、七進記数法のところの$234_{(10)}$個のタイルを七進記数法に従って並べ替える問題は、取り組み甲斐のある楽しい問題といえるだろう。十進記数法を通してn進記数法の原理を理解しているならば「当然正しく考えることができなければならない」問題でありながら、十進記数法がn進記数法の特殊ケースとして認識されていないために、「これまでの教育を受けてきた子どもやおとなたちでも、その多くが」苦労しながら解くことになるからである。

しかし、これ以降には面白い問題を配置することができなかった。教材構成に重大な欠陥があったと見なければならない。「3．十六進記数法とは何か」「4．二進記数法とは何か」の章の構成がそれ以前の十進、七進とほとんど同じであり、展開が読めてしまうことも、つまらなさの要因だったろう。「6．情報科学の基礎としてのn進記数法」とリンクさせながら十六進と二進を教える方法を探究する課題が残ったといえる。

最後までタイルのイメージに寄りかかりながら説明を続けた点も、一部の受講生には否定的にとられた可能性がある。「タイルを使ってやるやり方は、まったく何も知らなかった人にとっては解りやすいと思いますが、中途半端に知っている人にとっては、面倒に思えると思われる気がします」という感想があった。先に述べたように、二進数のタイル描画の問題では、タイルがその面積によって数を表すという自然数のイメージ形成の役割を必ずしも果たしていないことが明らかになっている。

またこのことと関わって、n進数の定義式

$$\cdots\cdots a_2\, a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \times n^i), \qquad a_i \in \{0, 1, \cdots\cdots, n-1\}$$

を最後まで出すことのなかった点についても、再考すべきかもしれない。抽象的な思考への移行は、プラン作成者の予想よりも早い段階で起こったようである。

5.5　仕組みやアルゴリズムの獲得について

記数法の仕組みや計算アルゴリズムの獲得については、(＋)評価が13名、中立的(０)評価が４名であり、否定的評価をした受講生はいなかった。ただし、仕組みやアルゴリズムの獲得ができなかった受講生が、わざわざこれらに言及して「理解できなかった」や「わからなかった」と書くとは思われないため、この評価分布には割引が必要である。なお、(０)評価の４名は、「n進法を０以上の数で解けといわれれば解けますが、数学的な一般論で説明しろといわれるとまだ不理解な点が多いと思います」のように、n進いずれでも対応できるような自信を十分には持てていないことを述べたものである。

本プランでは、計算ができるようになるだけではなく、記数法と計算アルゴリズムについての原理的理解を獲得することを目指した。また、そのことを通じて「計算の答が合ってさえいればよい」のような数学観や学習観を転換するという目標をも併せ持っていた。13：４：０という評価結果は鵜呑みにはできないとはいえ、感想文を見る限りでは、本プランがこの課題に関して一定程度の成功を収めたと判断できる。受講生の以下の感想は、記数法の仕組みを理解したことを記したものである。

- n 進記数法というものがどんなものか、どんなしくみでなりたっているのかわかった。ただ数字をならべるだけじゃなく個、本、枚という概念をもちいることによってよりわかりやすかったです。特に桁が繰り上がるということがわかった。
- n 進数に対する理解度がかなり上がった。今までは２進数しか習ったことがなかったのでその仕組みがはっきりいってよくわかっていなかったんですがたいへんよくわかりました。

また、次の感想も、計算ができることと意味を理解することの関係に関しての、重要な指摘をしている。

　コンピュータは、もともと機械だから、その計算を機械的にせず、理解しながら（図解で）行うということは納得できなかった。特に７進数などというのは通常、全く使わないために、無駄だと思っていました。しかし、n 進数を理解するためとしては、通常使わない進数を用いることによって、ちゃんと理解しているかどうかの確認には最適だと思います。

前半部分で意味の理解を否定していたことを述べているが、後半で、「通常、全く使わないために、無駄」だと思われる七進記数法を通した n 進記数法の意味理解の必要性に言及している。「機械的に」と「理解しながら」を対立物として捉えていた認識は、記数法の原理を獲得することによって改められ、対立物は統一されることになる。この受講生は今後、「計算を機械的にせず、理解しながら（図解で）行う」ことはないだろうが、それでよいのである。計算は、コンピュータで「機械的に」にさせることになろう。そのためのプログラムは、「理解しながら」書かれることになるはずである。「理解しながら」を前提としないで用いられた「機械的に」という言葉の意味は、すでに変質している。本人がコンピュータで「機械的に」計算をしたところで、それは「機械的に」なされた計算ではないのである。

さらに、以下の感想は、「計算ができればよい」といった望ましくない数学観や学習観が転換し、仕組みを理解することの重要性に気がついたことを述べている。

- 今まで受けた数学はただ公式を教えるだけで、本質を教えてないということがわかったです。どういうしくみで成り立っているのかわからなかったし、ただ問題を解いているだけだということを思いました。
- ２進数について、今までは２で割ることで10進数から２進数に直してきましたが、今回ので説明のできる直し方の方法がわかりました。
- ２進数は中学だか高校のときにやったので少しはわかっていたが７進数や16進数はやったことがなく、理解できて良かった。10進数を n 進数に変えるのを本当の意味で理解できた。
- これまでに受けた事のある２進数などの授業はただ計算方法を覚えるだけといった感じがあったので、今回の授業はそうでない所が良かったと思う。
- 今までの授業はただ計算ができればＯＫで、“簡単”ではあったけど、本当に理解はできていたのか⁉と思います。

大学生は、決して「ただ計算方法を覚えるだけ」や「ただ問題を解いているだけ」の授業をよしとしているわけではない。「本質を教え」られて「本当の意味で理解」したいと願っていることが、これらの感想から伺える。

最後に、本プランによる認識の素晴らしい進展を示す感想を紹介しよう。「マルあんき」による計

算を否定させn進記数法とは何かを教えるという教育目標。見慣れない七進記数法を扱うことにより「やられた」という思いをさせることでn進記数法の原理に迫ろうという教材構成のねらい。その双方を理解してもらえたことが、「n進数の事をまったく理かいしていない事がわかった」という告白によって表現されている。この告白は、「n進数の事をまったく理かいする」とはどういうことかを認識し得たからこそ行えるものである。

> 10進から2、16進の変換はいつもやっていたが7進数というのはやられたまったくできなかった。自分は2進の1，2，4，8… というのをマルあんきしていつも変換していたのでn進数の事をまったく理かいしていない事がわかった。

6　終わりに

本稿では、情報科学の基礎である二進記数法をn進記数法の原理とともに教えようとする授業プラン「n進記数法とは何か」の教育内容・教材構成論、及びその実験授業による検証結果について論じてきた。

大学生の多くは、十進数と二進数の相互変換の計算はできる。しかし、その計算は機械的にできるというだけであり、なぜそれが正しい計算方法であるかを説明できる者はほとんどいない。これはそもそも、記数法の原理を理解していないためである。そればかりか、説明する必要性を感じてすらいない可能性もある。本プランは、n進記数法の原理と基数変換計算のアルゴリズムを教えるという目的をもって作成された。この目的が達成されれば、「意味がわからなくても計算方法を覚えればよい」「答が合っていさえすればよい」といった数学観や学習観の虚しさに気づいてもらうことも可能であろう。

「n進記数法とは何か」ではまず、十進記数法の原理をタイル図のイメージとともに再確認させている。次に、見慣れない七進記数法を扱うことによって、十進記数法との同一性と差異性に気づかせることを通して、n進記数法への一般化を容易にさせるという教材構成論上の特徴を持っている。本学一年生のインターネット論Ⅰにおいて実験授業を行った結果、本プランの目的はほとんどすべての受講生に対して達成されたといえる。その根拠は、プランのなかで扱っていない十進数から六進数への変換計算のアルゴリズムを説明する課題に対して、90%の受講生が正しく解答したことに求められる。しかもこの解答は、授業で使用したプリントを見られない状況下でなされている。受講生は、十進記数法の概念を頼りにしながらこの問題を解いたと考えられる。このことから、ほとんどの受講生が、任意のn進数への変換も自由にできるアルゴリズムを獲得していると見なせる。実際、約80%が「もう何進数にでも直すことができるだろう」との自信を表明している。さらに、ただ計算ができることだけではなくその意味を理解することの重要性を指摘した感想も多く見られ、本プランは、受講生の数学観や学習観を望ましい方向へ転換させるという目標の達成度についても、一定程度の評価ができると思われる。

以上のことから、授業プラン「n進記数法とは何か」は、n進記数法の原理と基数変換計算のアルゴリズムを教える目的を果たすことが明らかになった。しかしながら、改訂の余地がないわけではない。楽しさに欠けたプランであることは否めず、情報科学の諸分野との関連のもとにn進記数法を教えるという課題が残された。

［付記］実験授業に協力してくださった、2002年度インターネット論Ⅰ受講生の皆様に感謝申し上げます。また、本稿の執筆にあたり、北海道大学大学院教育学研究科の須田勝彦氏を中心とする数学教育研究グループの皆様には、中間報告の機会を与えて頂き貴重なご意見を頂戴しました。記して感謝申し上げます。

●註

（1）筆者は自然数に０を含める立場をとる。その理由については、須田勝彦「中学校数学カリキュラム再構成への試み－入門期の中学校数学を中心に　第１部　理論編－」（北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第17号、2000年）を参照。

（2）足立自朗「授業をいかに評価するか」（柴田義松・竹内常一・為本六花治編『教育学を学ぶ［新版］』有斐閣、1987年）164頁。傍点原文。

（3）この評価方法は足立自朗が「授業をいかに評価するか」で述べている「事後テストのみのデザイン」に近いといえるが、事後テストを行う代わりに授業後の感想文を用いることと、学習者が使用したプリントも評価を探る資料とする点で異なっている。

（4）杉原宏之は、「［二進法の－引用者］実際の指導においては、二進法の基本的な原理がおろそかにされがちであり、十進法で表現された数を二進法や五進法に直したり、その逆の換算を行うことが重要視されることが多い」として、二進法指導の教材開発に取り組んでいる。しかし、「キャンディー取りゲーム」を通して「二進法を感覚的に身につけさせたいというのがねらい」であり、記数法の原理獲得を目指しているわけではない。杉原宏之「聾学校における二進法の指導－有効な教材の開発をめざして－」（文部省初等中等教育局特殊教育課編『特殊教育』No.91、1998年、18-21頁）参照。

（5）以下は、野崎昭弘『二進法』共立出版、1978年を参照。

（6）通常 $i > n \rightarrow I = 0$ のとき …… $a_2a_1a_0$ を a_n …… $a_2a_1a_0$ と書いてもよい。もちろん書かなくてもよいのであるが、書かなくてもよいところに記数法の本質がある。このことも記数法を理解する上で重要なものと考え、後述するように教育内容として取り入れた。

（7）右下の$_{(10)}$は234が十進数であることを明示している。

（8）もちろん、この段階のすべての子どもが、無限の概念を獲得してすべての自然数の存在とその十進記数法による表記について理解することは難しいだろう。しかし、三桁以上の数を教える側は、これが子どもに対する無限概念指導とアルゴリズム指導の一環であることを認識していなければならない。「無限は、数学カリキュラムのなかで、いずれは獲得してもらわなければならない概念である。有限桁の自然数の加法の中には、「１位数同士の加法と繰り上がりの原理」が繰り返し現れる。その事実を通して、無限についての素朴な感覚を与えることは可能であろう」（拙稿「カリキュラム構築を展望した学習指導要領批判－算数・数学を中心に－」（北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第17号、2000年、53-63頁）59頁参照）。

（9）志賀浩二『数の大航海－対数の誕生と広がり－』日本評論社、1999年を参照した。

（10）$a^m = a^{m+0} = a^m \times a^0$ より、$a^0 = 1$ を導く。

（11）小学生向けの小数の授業プラン「小数とは何か」では、七進小数によって単位の系統的等分という小数の本質を教え、しかる後に十進小数へと移行する流れをとっている。「n 進記数法とは何か」で七進記数法を扱うというアイディアはここから来ている。「小数とは何か」については、須田勝彦「授業書「小数とは何か」による授業」（北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第３号、1985年、73-119頁）を参照。

（12）同様の空しい規則として、「二進数を十六進数に直すには、二進数を下から四桁ずつ区切って、それぞれを十六進数に直せばよい」と指導する場合もあろう。この計算はむろん正しいが、記数法の原理を十分納得した後でなければ単なる計算手順の暗記になってしまう。

（13）プリントは回収したが、必要な人にはコピーを取らせてもらった上でお返ししたいと伝えたところ、６名からの申し出があった。

（14）十進→七進変換については、計算結果が合っているかどうかを見るのではなく、計算のアルゴリズムが獲得されているかどうかを判断して「できている」「できていない」に分類している。

（15）このパスカル三角形をプリントの表紙の絵にして一番初めに配布している。

（16）感想文のこのような分析方法は、前掲須田勝彦「授業書「小数とは何か」による授業」に学んでいる。

（17）板倉聖宣『仮説実験授業のABC　楽しい授業への招待（第４版）』仮説社、1997年、43頁。板倉はさらに第三の条件として、「先生が、またこれをやってみたいと思うほどのたのしさ、おもしろさがあるということ」をあげている。

（18）板倉聖宣「授業書のつくり方」（仮説実験授業研究会編『科学教育研究』第２冊、国土社、1970年）15頁。

●英文タイトル

Teaching Notation: An Analysis of Experimental Lessons at a College

●英文要約

Binary notation is a basis of information science. The system is fit for computers. But it is not easy to use it because we are living in a world of decimal notation.

Many college students don't understand the essence of notation though they can translate decimal numbers into binary numbers. So I wrote a textbook on notation for the purpose of teaching the essence of notation and the algorithm to translate the bases and cleaning up the misunderstanding that Mathematics is merely calculation. And I had experimental lessons to inspect the effectiveness of the textbook.

As the result of the lessons, ninety percent of the students understood the essence of notation and gained the algorithm to translate from one base to another. And many students understood that Mathematics is not calculation.