# ゲーデル「不完全性」定理と自己言及に伴う論理矛盾

姫宮利融

**●要約**

ゲーデル「不完全性」定理の訳と解説が岩波文庫に収められたので、それを辿り、数学においても自己言及に伴う論理矛盾が生じていることを跡付けた。そして、その典型として有名な「嘘吐きのパラドックス」の典拠である『新約聖書』の「テトスへの手紙」の該当箇所を紹介した。最後に、「論理矛盾」が認識の発展の駆動力であるという見解を述べた。

**●キーワード**

クルト・ゲーデル
不完全性定理
嘘吐きのパラドックス
自己言及
論理矛盾
テトスへの手紙
認識の発展
不可知論

小学校的な算数、即ち算術の世界から進んで数学の教育を扱うときに直面する困難のひとつは、その扱う対象が現実世界を思考のうえで概念化した数学的抽象の世界であることである。もちろん、これはあらゆる学問分野に共通して見られることであって、筆者の専門の金属凝固における溶質の拡散場なるものも連続体近似の成り立つスケールでのみ妥当であって、原子・分子のレベルでは成立しない。それにしても、数学は「数」という抽象度の極めて高い対象を扱うのであるから、何を前提にし、どのような論理で、いかなる命題が導き出されるのか、は十分に厳密でなければならない。

さて、前段のことを前提にしたうえで、本稿ではゲーデルの「不完全性定理」を論ずる。それは、ゲーデルの「不完全性定理」の「訳・解説」が新たに岩波文庫に収録されて(1)、筆者がかつて書いた「自己言及の問題」を思い起こさせたからである。また、同時に論理（形式論理）と人の認識の性質について、いくつか考える手がかりが得られるかも知れないからである。

## （1）

ゲーデルの「不完全性定理」は、ヒルベルトの「数学基礎論」構想と「プリンキピア・マティマティカ」「ツェルメロ-フレンケルの集合論の公理系」の成果の上に、次のような予想を述べ、それが成り立たないことを示す。

「これら二つの体系は十分に完成されたものであり、今日数学において使用されるすべての証明法が、それらの内部で形式化されるほどである。つまり、それらの証明法が少数の公理と推論規則に還元されるのである。したがって、これらの体系の内部で形式的に表すことのできるすべての数学的問題を決定するためには、その公理と推論規則で十分である、と予想するのは自然なことである。

しかし、以下に示すように、事実はこれに反する。それどころか、普通の整数の理論における比較的単純な問題でありながら、これらの両体系の公理から決定することができないようなものさえ存在する。……」(p. 16) (2)

ゲーデルは、次の例を示す。

「　$n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n);\ n]$　　(1)

……この定義の右辺に現れる概念はすべて PM（プリンキピア・マティマティカ----引用者）において定義可能であるから、それらにより組み立てられた概念 K も PM において定義可能である。（ところが）ある自然数 q について命題［R(q): q］の（真偽は）決定不能である。」(p. 19)

R(n) は PM の自然数型の自由変数を一つもつ論理式（類記号）あり、それを順番に並べたもののn 番目のものである。［ $\alpha$ ；n］は任意の類記号 $\alpha$ の自由変数に n を代入したものである。*Bew x* は“*x* は証明可能な論理式である”という意味であり、上線は否定を表す。

ゲーデルは、次のようにしてこれが矛盾をもたらすことを示す。

「K が PM において定義可能であることを言いかえると、論理式［S;n］の内容が、自然数 n が K に含まれる、ということを意味するような類記号 S が存在する（ということである）。すなわち、ある自然数 q に対して

$$S = R(q)$$

が成り立つ。……（ここで）命題［R{q}; q］が証明可能だとしよう。そうすると、S = R(q) より q が K に属することになり、（1）より $\overline{Bew}[R(q);q]$ が成り立つことになるが、これは仮定に反する。反

対に [R(q);q] の否定が証明可能だとするとならば、$\overline{q \in K}$ すなわち $Bew[R(q);q]$ が成り立つことになる。したがって [R(q);q] とその否定が同時に証明可能になるが、これもまた不可能である。」(p. 19-20，一部引用者による加筆)

「この推論とリシャールの二律背反とのアナロジーが注意をひく。また“嘘吐きのパラドックス”とも関係がある。」(p. 20)

訳注によると、「一般に、任意の認識論的な二律背反を、決定不可能性の証明に利用することができる。」(p. 20) とのことである。

## (2)

ゲーデルの「不完全性定理」とは、次の 2 つの命題を指す。

「定理Ⅵ：【論理式】の類 $\kappa$ が $\omega$-無矛盾で再帰的であれば、v Ger r と Neg(v Ger r) のどちらも Flg(x) 属さないような再帰的な【類記号】r が存在する（ただし、v は r の唯一の【自由変数】である）。」(p. 46)

「定理Ⅺ：$\kappa$ を再帰的で無矛盾な【論理式】の類とせよ。そのとき、$\kappa$ が無矛盾であることを意味する【文論理式】は $\kappa$-【証明可能】でない。特に、P が無矛盾であるなら、P の無矛盾性は、P においては証明不能である（無矛盾でない場合には、当然あらゆる命題が証明可能である）。」(p. 59)

前記の岩波文庫の解説によると、これら 2 つの命題は普通のことばで書き直すと次のようになる。

「1．数学の形式系、つまり形式系とよばれる論理学の人工言語で記述された「数学」はその表現力が十分豊かならば、完全かつ無矛盾であることはない。（第一不完全性定理）」

「2．数学の形式系の表現力が十分豊かならば、その形式系が無矛盾であるという事実は、（その事実が本当である限り）その形式系自身の中では証明できない。（第二不完全性定理）」(p. 78)

解説者はこの 2 つを「数学的不完全性定理」と呼んで、次の「数学論(ろん)的不完全性定理」と区別している。「数学論的不完全性定理」は「数学的不完全性定理」を敷衍したものである。

「1’．数学は矛盾しているか不完全であるか、どちらかである。」

「2’．数学の正しさを「確実な方法」で保障することは不可能であり、それが正しいと信ずるしかない。」

## (3)

ゲーデルの「不完全性定理」は自己言及にかかわる論理矛盾が発展したものであることは(1)の終わりに示唆された。そこで、「嘘吐きのパラドックス」について述べておこう。「嘘吐きのパラドックス」は次のようなものである。

「すべてのクレタ人は嘘吐きだ」とあるクレタ人が言った。

この「……」の中の命題が真とする。そうすると、あるクレタ人の言うことも嘘になり、「……」の否定が真となる。つまり、「すべてのクレタ人が嘘吐きとは限らない。」となり「……」が真とした仮定に矛盾する。

「……」の中の命題が偽とする。そうすると、「すべてのクレタ人が嘘吐きとは限らない。」が真として成立していることになり、あるクレタ人の言う「……」に適用されるが、これは「……」内の内

容と矛盾する。

この文は、ギリシアの伝説的詩人・預言者の名をとって「エピメニウス文」と呼ばれる。この文を有名にしたのは、先の PM のラッセルだとのことであるが、「『すべてのクレタ人は常に正直だ』とあるクレタ人が言った」場合でも、一見論理矛盾が現れないだけで自己言及のもついかがわしさに変わりはない。

エピニメウス文は『新約聖書』(3)「テトスへの手紙」1-10〜12に現れる。

「実は、不従順な者、無益な話をする者、人を惑わす者が多いのです。特に割礼をうけている人たちの中に、そういう者がいます。その者たちを沈黙させねばなりません。彼らは恥ずべき利益を得るために、教えてはならないことを教え、数々の家庭を覆しています。彼らのうちの一人、預言者自身が次のように言いました。

「クレタ人はいつもうそつき、

悪い獣、怠惰な大食漢だ。」」

「There are all too many, especially among Jewish converts, who are out of all control; they talk wildly and lead men's minds astray. Such men must be curbed, because they are ruing whole families by teaching things they should not, and all for sordid gain. It was a Cretan prophet, one of their own country men, who said, 'Cretans were always liars, vicious brutes, lazy gluttons' --- and he told the truth.」(4)

自己言及にかかわってこのような論理矛盾が起こるのは、「排中律」を採用するからである。排中律はアリストテレスの中にすでに現れる。「さらにまた、二つの矛盾したもののあいだにはいかなる中間のものもありえず、必ず我々はある一つについて或る一つのことを肯定するか否定するかのいずれかである。」(5)

## (4)

体系というものの不完全性あるいは或る時点でその体系に含まれる命題相互の間に論理矛盾が存在することをどう考えたらよいのであろうか。「解説」によると、「例えば、不完全性定理は人類の知の限界性を示すという見解が一般的だが、ゲーデル自身はそういう解釈を退けている。」とのことだ。(p. 77) ゲーデルは不可知論的な解釈に反対したわけである。

一般に、人間の認識は自然のシステムの一部である人間が自然《ここにいう「自然」は哲学的には「物質」であって「社会」も含まれる》を認識するのであるから、大げさにいえば「自然の自然に対する自己認識」に他ならない。主体と客体を分離するデカルト的切断は、この認識を整理する手がかりを与えるが、認識の内部に論理矛盾の存在を残す。こう考えると、不完全であること、論理矛盾が存在することは、認識を深化させる駆動力でもある。

ゲーデルの「不完全性定理」は科学として「数学」が発展する駆動力を改めて指摘したものといえよう。

**●参考文献**

(1)『ゲーデル　不完全性定理』、林晋／八杉満利子　訳・解説、岩波文庫　青944-1
(2)(1) の書、以下断りのない限り(1)のページ数を指す。
(3)『聖書』、新共同訳、日本聖書協会、2002年
(4)"The New English BIBLE", Oxford University Press & Cambridge University Press, 1970
(5)『アリストテレス　形而上学【上】』、出隆訳、岩波文庫 33-604-3、p. 148

**●英文タイトル**

Gödel's incomplete theorem and a paradox from self-mention

**●英文要約**

Japanese translation and interpretation of Godel's "incomplete theorem" has been published in a series of IWANAMI　Bunko. We have confirmed that a paradox necessarily happens from self-mention even in the case of mathematics. Then as an example of self-mention paradox, "a liar paradox", parts of "The letter form Paul to Titus" is introduced. Finally, we suggest that a paradox is a driving force of cognition of mankind about nature and society.

**●英文キーワード**

Gödel, incomplete theorem, self-mention, a liar paradox, cognition