構造的なイメージを形成する数学的学習具の特性に関する考察

澁谷　久

● 要約

本研究の目的は，数学教育における教具・学習具の在り方をイメージを観点にして考察し，授業実践の中で実証的に示すことである．そのために，数学的教具・学習具を定義し，その意義について考察する．さらに，意義にかかわる数学教育におけるイメージとその働きを示し，イメージの構造化の観点から，数学的教具・学習具の特性の在り方を考察する．それを踏まえ，特性それぞれを備える中学校数学科における筆者が開発した学習具を使用する実験授業を策定，実践する．その結果，数学的学習具の在り方は具体的操作活動の価値を左右することを実証的に示す．

● キーワード

教材開発
数学
数学的学習具
特性
イメージ

Ⅰ．はじめに

１．本研究の意図：実験の定義の不鮮明さ

中学校数学科教師を対象にした調査[(1)]（澁谷，2013）において，数学的教具・学習具を開発する力の必要性を示しているのは 90％である．これは，中学校数学科における教具・学習具の必要性とともに，その特性を追究する必要性を示している．しかし，数学教育における教具にかかわる先行研究においては，認知・理解・思考に視点をおいた具体的操作活動を論ずるものが多く，その特性に焦点を当てたものは少ない．

２．研究の目的と方法

本研究は，上述の問題の所在を受けて，数学教育における教具・学習具の特性をイメージを観点にして考察し，特性が学習活動に影響することを授業実践の中で実証的に示すことが目的である．

この研究目的を達成するために，数学的教具・学習具を定義し，その意義について考察する．さらに，意義にかかわる数学教育におけるイメージとその働きを示し，イメージの構造化の観点から，数学的教具・学習具の特性を考察する．それを踏まえ，特性それぞれを備える中学校数学科における筆者が開発した学習具を使用する実験授業を策定，実践する．それにより，数学的学習具の特性は具体的操作活動の有効性の度合いに影響することを実証する．

Ⅱ．数学的教具・学習具の意義に関する考察

１．数学的教具・学習具の定義と意義

(1) 数学的教具・学習具の定義

数学的教具について，平林は，「数学の学習に向けて，望ましい子どもの活動性を誘いだすための現実の小断片－それが数学的教具の一般的な概念であると考えたい」（平林，1987：349）と，数学科教育における教材・教具づくりに関する考察で，松本は，「「教育目標を達成し，教授・学習活動を促進するための素材であり，教育目標を達成するために使う道具，装置，機器を教具(Teaching Tools)」と呼ぶことにする」（松本，2009：28）と述べている．これらに共通することは，子どもの学習活動を活性化する具体物として存在である．これを踏まえ，本研究における「数学的教具・学習具」を次のように定義する．

数学的構造[(2)]を内蔵した操作，観察できる具体物である．ここで「操作」とは具体的操作，「観察」とは視覚による観察的な活動をいい，操作，観察によって数学的な構造が引き出される．

指導者が提示，演示する道具，狭義の「教具」と区別し，生徒自身の経験から行動や認知を変容させるための道具ととらえ，「学習具」という表現をとる．本研究においては，生徒一人一人が型紙から学習具を組み立て，操作することにより，主体的に数学をつくり上げる「もの」が中心となる対象で，現在における動的幾何環境などの学習具には言及しない．

(2) 数学的教具・学習具の意義

筆者が考える数学的教具・学習具の使用目的を以下に示す．その目的達成の可能性を高めることがその意義ととらえる．

【数学的概念・原理・法則にシェマを形成するイメージを加える】
「理解」,「数学的原理・法則の導出」,「キュー効果の発動」,「課題解決のきっかけの供給」,「数学的思考の場の設定」,「思考結果や予想の確認の場の設定」
【数学的技能の習熟，知識の定着を与える】
「数学的技能の習熟」,「知識の定着」,「計算」,「作図・測定」(澁谷，2011：3)

「数学的概念・原理・法則にシェマを形成するイメージを加える」とは，数学的概念・原理・法則(以下「概念・原理・法則」)を，直面した課題を解決するための道具となる内面に存在する構造的な学力，すなわちシェマにするために，イメージを形式的な概念・原理・法則(3)と融合させるということである．また，「数学的技能の習熟，知識の定着を与える」とは，技能の習熟や知識の定着のみではなく，計算や作図・測定をするための電卓やそろばん，定規やコンパス等の器具の使用目的を表す．本研究においては，シェマの形成にかかわる数学的学習具の特性に焦点を当てる．

２．概念・原理・法則にシェマを形成するイメージを加えることに関する考察

(1) 数学におけるイメージの意味

「数学におけるイメージ」は，概念・原理・法則の意味を含み，概念・原理・法則に対する多角的な視点の形成を可能にする．よって，概念・原理・法則の活動範囲が拡大され，「数学におけるシェマ」は，概念・原理・法則と同じ構造をもつ課題に対して有効な解決への道具となる．ここでいう「数学におけるシェマ」とは，「数学におけるイメージ」が加わった「活字的に表現された概念・原理・法則」，またはその組織的結合体である．「数学におけるイメージ」を次に示し，数学におけるイメージを構成する３つの構成イメージを設定する(図１)．

「イメージとは，数学的概念・原理・法則に関する表象，すなわち，学習過程で得られた数学的概念・原理・法則の印象(対象を意味・指向する)の再現されるものである」 (澁谷，2011：3)

数学におけるイメージ
- 図式的イメージ
- 動的イメージ
- 構造的イメージ

図１　数学におけるイメージ

「図式的イメージ」は，概念・原理・法則の数学的構造を含む絵，図，具体物の表象で，数学的教具・学習具そのものの映像または図式化したものである．「動的イメージ」は，概念的操作に対応する動的な図式的イメージで，数学的教具・学習具の具体的操作から得られるプロセスを指向する動的な表象である．「構造的イメージ」は，図式的イメージや動的イメージから概念・原理・法則の構造が浮き出た表象で，数学的教具・学習具に対する具体的操作から引き出される概念・原理・法則の構造の表象である．

Bruner のＥＩＳ原理における Enactive Representation，Iconic Representation，Symbolic

Representation は，それぞれ動的イメージ，図式的イメージ，構造的イメージに相当するように思われるが，この原理において，Ｅ，Ｉ，Ｓの順序に理解されやすく，その順序に獲得がなされることが指摘されている点から，Enactive Representation と Iconic Representation を合わせたものを，動的イメージと図式的イメージを合わせたものととらえる．

数学におけるイメージを構成する 3 つのイメージは，それぞれ独立したものではなく，もとになるイメージを含みながら進化していく．まず，図式的イメージが形成される．図式的イメージに動作性が付加すると動的イメージが形成される．次に動的イメージから抽象性の強い構造的イメージが形成される（図２）．

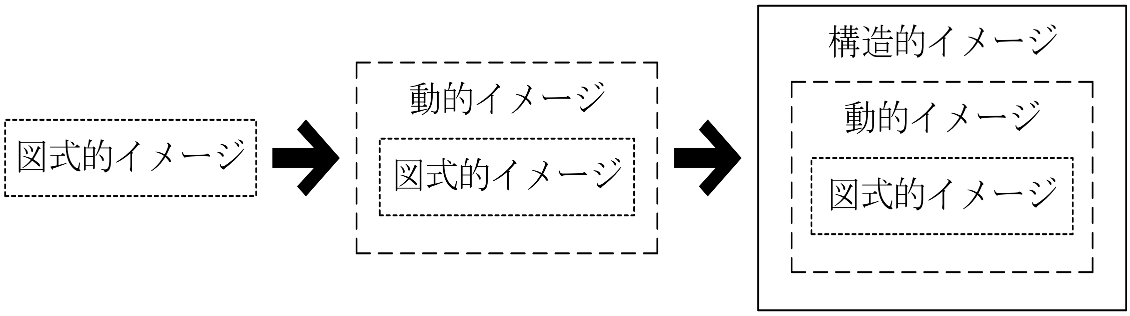

図２　数学におけるイメージの進化

このイメージの進化は，平林が，Gattegno のイメージ観を考察し，Cuisenaire の教具を例に示していることに相当する．平林は，「木片の操作から子どものえた像を，加減法の概念に結びつけるであろう．（中略）8 個の関係は，同一の像の異なった客観的側面である．そして，この各関係相互間の自由な交流または変換の可能性が，ガッテニョーのいう《力動性》であり，加減法の概念の真の理解を裏付けるものであり，文章題や実際問題の解法での加減法の使用を可能にするものである．しかし，この《力動性》も，ガッテニョーに言わせれば，おそらくかような記号的水準での像のもつ次元に属するものであり，しかもこの像たるや，それ以前の木片自体の感覚・運動的操作の水準から進化したものと考えらえる．」（平林，1987：214）と述べている．

この《力動性》は，概念・原理・法則と同じ構造をもつ課題に対して有効な解決への道具となる「数学におけるシェマ」を形成する「構造的イメージ」の構造性と数学におけるイメージの進化を示している．

⑵数学におけるイメージの働き

数学におけるイメージが働く場面は，「数学におけるシェマ」が稼働されるときのみならず，シェマが形成される過程にも存在する．数学におけるイメージの働きとして次のものがあげられる．「見通し」：思考の方向性や到達点を見通す．動的イメージが，思考の糸口，方向性をつくるとともに，到達点を見通し，確実性の高い予想活動へと移行する．動的イメージ自体が直観力を形成する．「理解」：概念・原理・法則を理解しやすくする．理解について Skemp は，「適切なシェマの中へ同化することである．」（R. R. スケンプ，1985：35）と述べている．人間のもつシェマは具体的場面に即している場合が多く，数学のような抽象的な事項も具体的なものに置き換えた方がとらえやすい．「概念的操作の有機化」：概念・原理・法則の概念的操作を有機的なものにする．機械的な概念的操作であっても，つまずきや戸惑いの際に，イメージによってなされている概念・原理・法則の意味付けが有効に作用する．

「融合」：直接的価値（概念・原理・法則，数学的技能）（澁谷，1999：3−5）と間接的価値（直観力，表現力，論理的思考力，学習意欲等）（澁谷，1999：3−5）を融合する．概念・原理・法則の理解や技能の習熟（直接的価値の形成）の際に形成された数学におけるイメージが，そのプロセスで培われた間接的価値と直接的価値をひとつに融け合わせる．「活用」：ある課題に直面した際に，それと同じ構造をもつ概念・原理・法則や思考プロセスを選択，活用する．ここでの数学におけるイメージは，情報選択力を形成する．「記憶の保持」：概念・原理・法則を記録保持しやすい状態にする．図式的イメージや動的イメージが概念・原理・法則の記憶を保持する．特に，動的イメージにより情動的要因も付加され，より効果的である．「ネットワーク化」：概念・原理・法則を他のそれと関連させ，数学におけるシェマのネットワーク化を行う．活字的な概念・原理・法則により多くの情報を付加する作用のある数学におけるイメージが，シェマ間の共通部分を見い出し，そのつなぎ手の役目を担う．

Ⅲ．数学的教具・学習具の特性に関する考察

１．求められる数学的教具・学習具の特性

数学における構造的イメージを形成するためにどのような教具・学習具が求められているのか，その特性について考察する．「求められる」とは，「子どもたちの中に数学におけるシェマを形成する」という意味である．本研究では求められる数学的教具・学習具の特性を次のように設定する．

「構造の単純化」：数学的構造が抽出されやすくイメージが鮮明になる．
「生徒全員組み立て，操作可能」：生徒個々の操作，思考の自由を保障する．組み立てることは，全員操作を可能にし，操作前のレディネス形成に作用する．
「汎用性」：複数の内容項目に適用し，数学的構造の系統性を表現する．
「正確性」：処理や分析のしやすさを生み出す．（澁谷，2011：3）

これらの特性は，数学におけるイメージへ作用すると考える．特性間での作用もある（図３）．特性の中には，数学的構造を具体的な事象に変換することにより，生徒を教材に近付け，理解や思考のしやすさを生み出すアプローチする作用や，人間の内面にある「触れて動かして確認したい」という操作の自由性を保障し，生徒の自発的な活動から学習過程におけるストレスを発散させる，自己で確認することによる作用を介して，間接的に数学におけるイメージへ作用するものもある（図４）．アプローチする作用は，興味・関心・意欲の面で，学習活動の基盤を生む重要な働きであり，具体物の存在により引き起こされ，図式的イメージの形成と密接な関係がある．また，自己で確認することによる作用を付している操作によって，動作性や獲得したものが自分のものであるという自覚を備えた，すなわち，内面化した数学的構造が生まれる．身体を動かすと豊かなイメージが形成されるという「イメージの身体性」も同様なことを示している．数学におけるイメージが加えられるということは，数学的構造が内面化することであるから，自己で確認することによる作用が数学におけるイメージの形成に大きく作用する．「生徒全員組み立て，操作可能」は，動的イメージ，構造的イメージに直接作用

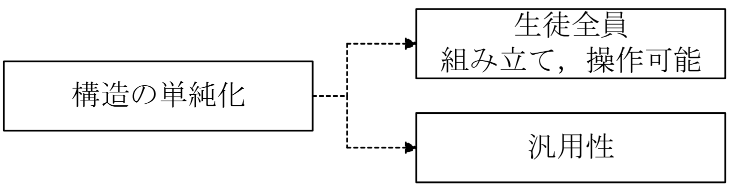

図３　特性間の作用

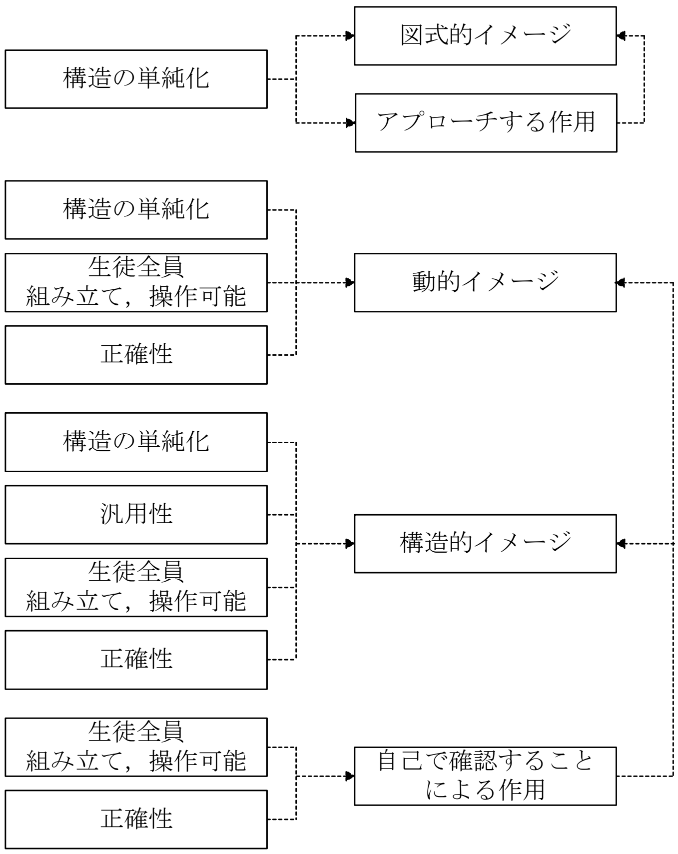

図４　特性の数学におけるイメージへの作用

したり，自己で確認することによる作用を介して構造的イメージの形成に作用する．等式の性質の学習の際に，天秤を対象にして具体的操作をする場合，釣り合いを保つことは，等式の性質の形式的操作に対応し，等式の性質に動的な図式的イメージが加えられることになる．さらに，生徒自身の操作により，等式の性質は単なる形式的なものではなく，生徒自身のものとして，意味やプロセスを指向し，他の内容項目における等式や不等式などに向かい合わせる構造的な学力，シェマとしての存在になる．

これらの特性は，構造的イメージ，すなわち，数学におけるシェマの形成を活性化する．

２．特性「生徒全員組み立て，操作可能」の意義

日本教材学会は，「同じ教材内容でも，教科，目標，指導過程や指導形態の選択次第で学習効果は違ってくる．」(日本教材学会編，2016：173) と述べている．現物実験の授業形態として，個人とグループ，デモンストレーションがある．澁谷は，ケラーが提唱する「ＡＲＣＳ動機づけモデル」(鈴木，2007：176−179) により，「注意」，「関連性」，「自信」，「満足感」の４つの側面から現物実験を考察し，子どもの自発性が伴う実験は，個人という実験形態から，より引き出されるものが多いことを示している (澁谷，2017：22)．

既に述べたように，自己で確認することによる作用が数学におけるイメージの形成に大きく作用する．数学におけるイメージは，生徒の自発的な学習の上で形成されると考え，本研究では，個人による現物実験の道具となる「学習具」に焦点を当てる．特性「生徒全員組み立て，操作可能」を前提と

し，対象の特性として「構造の単純化」,「汎用性」,「正確性」を設定する．以下「教具・学習具」を「学習具」とする．

Ⅳ．特性を備える学習具を使用する実験授業

本研究の目的を達成するために，以下の実験授業を設定する．

１．実験授業及びその対象とデータ採取方法

(1) 特性「構造の単純化」にかかわる授業と学習具

2015年10月5日に，特性「構造の単純化」にかかわる学習具を使用する実験授業を，北海道内の公立中学校第3学年8名を対象に実施した．使用する学習具は，関数による変化の割合の違いや共通点をとらえるものである．「構造の単純化」を備えるものは，スリットのある紙片を，グラフのかかれた座標平面上でスライドさせて，スリット内の点の動きを観察するものである．これに比べて構造が複雑なものは，学習具上の2点をグラフの2点に合わせ，数として示された x の増加量と y の増加量を読み取るものである．１次元と２次元の操作，動作原理や構造の理解度に違いがある（図５）．同一授業においてそれぞれの学習具を4名ずつが使用する．

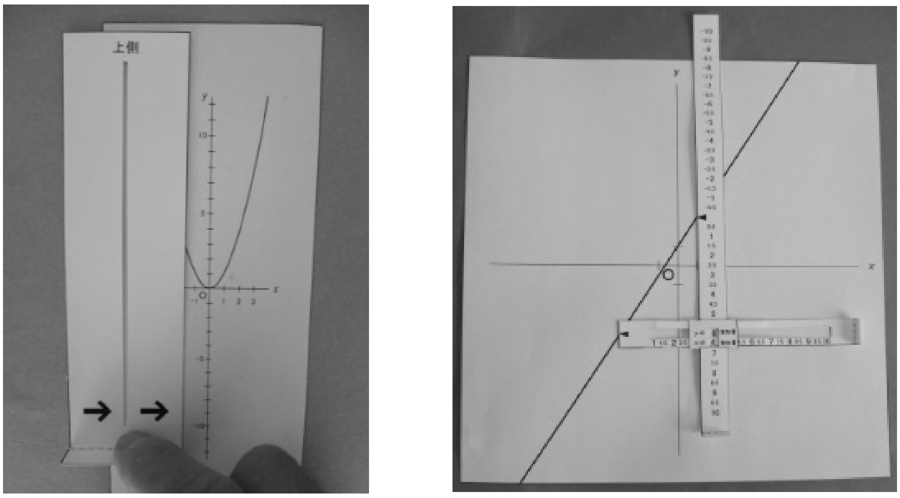

図５　特性「構造の単純化」にかかわる学習具（左図が特性を備えるもの）

授業のねらいは，「学習具の操作を通して，関数 $y=ax^2$ の変化の割合を１次関数のそれと比較することができ，それを表現することができる．」である．

授業（生徒の活動）の流れを以下に示す．

ア．関数 $y=ax^2$ と１次関数のグラフをかき，その上で学習具を操作した場合の結果を予想する．イ．学習具を操作し，関数による違いを観察し，予想を確かめる．ウ．学習具の操作で得られたものを表現する．

(2) 特性「汎用性」にかかわる授業と学習具

2015 年 12 月 14 日に，特性「汎用性」にかかわる学習具を使用する実験授業を，北海道内の公立中学校第２学年７名を対象に実施した．使用する学習具は，平面図形を構成し，その性質を発見するものである．「汎用性」を備えるものは，辺をつくる部品と角の大きさを測定する部品，それらをつなぐ

部品からできていて，中学校数学科第２学年の図形領域における以下の 10 の内容項目の学習に使用できるものである（澁谷，2015：92）．

○対頂角の性質，○平行線の性質，平行線になるための条件，○三角形の内角，外角の性質，○三角形の合同条件，○二等辺三角形の性質，二等辺三角形になるための条件，○直角三角形の合同条件，○平行四辺形の性質，○平行四辺形になるための条件，○特別な平行四辺形，○平行線と面積

これに対して，「汎用性」を備えないものは，平行四辺形のみを構成するものであるが，角の大きさは自由に変えることができる（図６）．同一授業においてそれぞれの学習具を４名と３名が使用する．なお，汎用性の学習具を使用しない３名は，中学校第２学年の図形領域の以前の学習において，汎用性を備える学習具を使用していない．

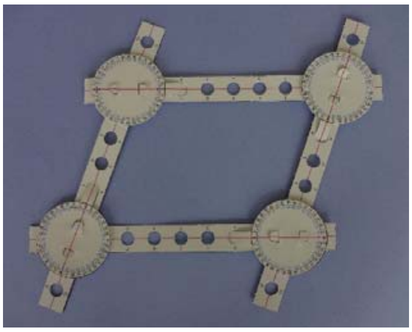

図６　特性「汎用性」にかかわる学習具（左図が特性を備えるもの）

授業のねらいは，「学習具の操作を通して，平行四辺形の性質を理解し，それを証明することができる．」である．

授業（生徒の活動）の流れを以下に示す．

ア．平行四辺形を図にかき，その性質を予想する．イ．学習具で平行四辺形を構成し，その性質を確認し，予想を確かめる．ウ．平行四辺形の性質の証明方法について考える．

２つの学習具による情報の与え方の違いが影響しない設定にする．

⑶ 特性「正確性」にかかわる授業と学習具

2015 年９月 10 日に，特性「正確性」にかかわる学習具を使用する実験授業を，北海道内の公立中学校第１学年６名を対象に実施した．使用する学習具は，天秤と“x”と“1”の分銅で構成されており，１次方程式を表現し，それを解く方法を見付けるものである．「正確性」を備えるものは，天秤の支点がマッチ棒で分銅の材質が厚紙であり，天秤の釣り合う状態が鮮明に表現されるものである．これに対して，「正確性」にやや難があるものは，支点が紙製で，うでとの摩擦が大きく，分銅の材質も画用紙であり，釣り合う状態がやや不鮮明である（図７）．同一授業においてそれぞれの学習具を３名ずつが使用する．

授業のねらいは，「学習具の操作を通して，１次方程式を解く方法を見付けることができる．」である．

授業（生徒の活動）の流れを以下に示す．

ア．天秤の左の皿と右の皿に指定された分銅を載せる．イ．天秤が釣り合うように右の皿に“1”の分銅を幾つか載せる．ウ．左の皿に分銅が１個だけ載るように両方の皿を調節する．エ．学習具の操

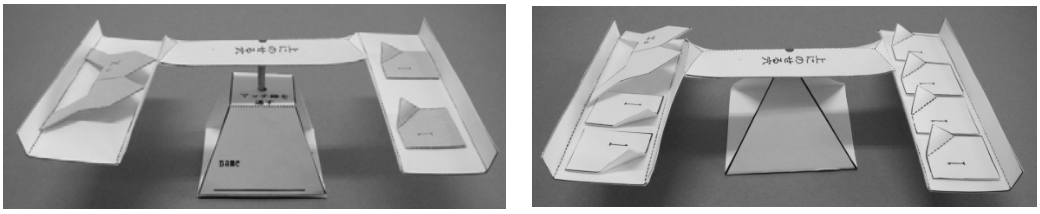

図７　特性「正確性」にかかわる学習具（左図が特性を備えるもの）

作で得られたものを表現する．

それぞれの実験授業で使用する学習具は，筆者が開発したものである．数と式，図形，関数の３領域，及び３学年で設定する．

データの採取であるが，生徒一人一人の様子を観察し，それぞれの授業についてＶＴＲによる記録とそのプロトコルを作成した．また，実験授業での生徒の活動に着目して，特性の有無による学習具の効果を考察するために，一人の抽出生徒の活動に焦点を当てた（表１）．それぞれの生徒は，自分の考えを自然に声に出すため，学習活動の状況をとらえるには適した生徒であると考える．活動の視点は，学習具の特性が構造的イメージの形成に有効に働くことの表出である．

表１　実験授業における抽出生徒

実験授業	学習具の対象の特性の有無	生徒
ⅰ	「構造の単純化」有	A
ⅰ	「構造の単純化」無	B
ⅱ	「汎用性」有	C
ⅱ	「汎用性」無	D
ⅲ	「正確性」有	E
ⅲ	「正確性」無	F

２．対象の生徒を中心とした活動とその分析

(1) 特性「構造の単純化」にかかわる授業

Ａの発言や行動を示す．

12　Ａ：１次関数では同じ速さだけど，２次関数（関数 $y=ax^2$）は速さが変わる．曲線はそうなる．	
17　Ａ：（波線をかいて学習具を操作する．）	
18　Ａ：速さが変わらないのは直線だけ．	
54　Ａ：（いろいろなグラフをかいて操作する．）	

Ａは，「１次関数では同じ速さだけど，２次関数（関数 $y=ax^2$）は速さが変わる．(12)」と動的イメージを形成している．さらに，「曲線はそうなる．(12)」，「速さが変わらないのは直線だけ．(18)」と自分の考えに対する自信を示している．１次関数と関数 $y=ax^2$ のみならず，関数全体について統合が行われ，特性「構造の単純化」が構造的イメージを形成している．その後，Ａは点の動きが止まることにも気付く．「構造の単純化」による操作の容易さが新たな数学的内容をとらえることに作用している．また，主体的に試行することは，単純な構造により，点の動きが鮮明で面白く，アプローチする作用が働い

ている表れである．

次に，Ｂの発言や行動を示す．

25　Ｂ：この２つの矢印（グラフの２点に当てる印）間の x の増加量と y の増加量ですよね．間の線は関係ないですよね．	
51　Ｂ：直線では x の増加量が増えると，y の増加量も同じ様に増える．	
59　Ｂ：放物線では増え方が違う．	

Ｂは，「間の線は関係ないですよね．(25)」と学習の見通しが不鮮明であると思われる．時間を要して51, 59 の発言に達しているが，変化の割合への結び付きがこの２つの発言からとらえることができる．

・特性「構造の単純化」にかかわる考察

視覚的な鮮明さのみならず，学習具を把握することの必要性がないことや操作が容易にできることにより，試行の回数を多くすることができ，データの個数が大きくなり，それぞれの試行から得られることがらの相違点をとらえやすく，鮮明で確かなイメージが形成される．特性「構造の単純化」が作用している．その際，生徒を教材へ近付けることにも作用している．事後の「関数 $y=ax^2$ の活用」での距離センサーによる時間と移動距離の関係を表すグラフ作成の実践において，「構造の単純化」を備える学習具を使用した生徒の方が，的確な回答をした割合は大きい[(4)]．

⑵ 特性「汎用性」にかかわる授業

Ｃの発言や行動を示す．

30　Ｃ：(「2 組の対辺はそれぞれ等しい」,「2 組の対角はそれぞれ等しい 」の証明に向けて,）これいろいろ使ってきたのでそのどれかを使うんですよね．	
31　Ｃ：ぱっと見，合同と同位角，錯角，対頂角かな．	
62　Ｃ：3 年生の図形でも使いますか？	

Ｃは，「 ぱっと見，合同と同位角，錯角，対頂角かな．(30)」と証明の根拠となる可能性のあることがらを多くとらえている．特性「汎用性」の影響が表れている場面である．澁谷が，「図形領域における汎用性を備える学習具は，帰納的に考えることの積み上げから，一般化や体系化な整理が伴う演繹的な推論の意識及びその能力を高める．」(澁谷，2015 : 96) と示すことと一致する．「3 年生の図形でも使いますか？(62)」は，「(30)」の発言後のものであり，図形を構成したり，考察する要素は，線と角に関するものであるという構造的イメージが形成されている表れである．

次に，Ｄの発言や行動を示す．

22　Ｄ：(「２組の対辺はそれぞれ等しい」の証明に向けて,）三角形の合同を使えばすぐ証明できそう．	
53　Ｄ：(証明を完成する.）	

Ｄは，「三角形の合同を使えばすぐ証明できそう．(22)」と証明で三角形の合同を使うことに限定しているが，証明はスムーズに完成している．

・特性「汎用性」にかかわる考察

多角的にものを考えるきっかけをつくること，概念・原理・法則のネットワークをつくることに特性「汎用性」が作用している．学習具が複数の内容項目に適用することにより，それぞれの項目における操作経験がつながりを伴って貯蔵され，構造的イメージが形成されている．事後の証明の学習に

おいて，「汎用性」を備える学習具を使用した生徒の方が，根拠となることがらについて発言をした割合は大きい．

(3) 特性「正確性」にかかわる授業

天秤の左の皿に“x”の分銅を 1 個，“1”の分銅を 2 個載せる場合，すなわち，方程式 $x+2=4$ についての学習部分について示す．

Ｅの発言や行動を示す．

69	Ｅ：“1”のおもり 4 個で釣り合った．
71	Ｅ：x の正体は両方から“1”を 2 個ずつ降ろせばいいので 2．
73	Ｅ：こんなもの（紙とマッチ棒）でも結構正確ですね．

Ｅは，「“1”のおもり 4 個で釣り合った．(69)」，「x の正体は両方から“1”を 2 個ずつ降ろせばいいので 2．(71)」と決定している． 特性「正確性」からの確信である．その後の方程式で表すことや解き方を考えることを容易に行った．「こんなもの（紙とマッチ棒）でも結構正確ですね．(73)」が示す様に，操作の確かさを感得している．これは，そこからつくられる数学的な内容の確かさの感得でもある．確かな動的イメージや構造的イメージが形成されていると考える．

次に，Ｆの発言や行動を示す．

55	Ｆ：釣り合うのは“1”の分銅が 3 か 4．
56	Ｆ：（周り人を見て,）4 個．
67	Ｆ：x だけを左に残すには 2 個ずつ取る．（首をかしげる．）

Ｆは，「釣り合うのは“1”のおもり 3 か 4．(55)」と決定できず，周りの人の様子を踏まえ，方程式に変換している．その後の方程式の解法を見付けるための学習具による操作を首をかしげながら進めている．「正確性」にやや難があるものについて，学習具の開発者のトライアウトにおいて，「4 で釣り合うことが多い」という程度の正確性であるため，問題を正確にとらえられないことが生じている．

・特性「正確性」にかかわる考察

自信が基盤になる学習が，特性「正確性」により生まれている．それは，自己で確認することによる作用を起こし，動的イメージや構造的イメージの形成につながると考える．「正確性」を備える学習具を使用した生徒の方が，主体的に学習を進めており，使用する時間も長く，内面化した釣り合いのイメージを形成する可能性が高いと考える．

Ⅴ．まとめと今後の課題

実験授業を中心に，数学的学習具の特性は具体的操作活動の有効性の度合いに影響することを示した．これは，学習具の開発に対する示唆を与える点からも意義のあることである．本研究は，学習具の使用目的「数学的概念・原理・法則にシェマを形成するイメージを加える」についての特性を対象としたが，「数学的技能の習熟，知識の定着を与える」についての特性の究明を課題としてあげる．

● 注

1）教職年数の平均 12.0 年の 30 名を対象に，①中学校数学の指導において，教具・学習具は必要だと思いますか，②数学担当の教師にとって，教具・学習具の開発をする力は必要だと思いますか，それはなぜですか，③数学的教具・学習具についての講習は必要ですか，④2013 年度において，数学的教具・学習具は開発されましたか，⑤教具・学習具の必要性を感じた場合，書籍等で検索してみますか，⑥開発した教具・学習具があれば概略を教えてください，の項目で実施した．開発する力の必要性は，授業や生徒の実態に合う教具・学習具の存在を理由にあげている．

2）数学的構造を，Bourbaki のものよりは厳密性に欠けるが，「数学的概念・原理・法則の基盤をなしている性質や決まり」ととらえる．

3）「形式的な」は，言語的や記号的な表現を表す.

4）距離センサーを用いて歩行により，提示した時間と移動距離の関係を表すグラフを作成させるものである．グラフは 6 個（比例 1，１次関数 3，２次関数 1，階段関数 1）提示する．「構造の単純化」を備える学習具を使用した生徒 4 人のうち 3 人は全問正解であり，構造が複雑なものを使用した 4 人のうち 1 人は全問正解，3 人は 2〜3 問の不正解があった．この実践において生徒の試行がお互いわからないように行った.

●引用・参考文献

平林一栄：数学教育の活動主義的展開，東洋館，349，214，　1987.

松本修身：高等学校数学科教育における教材・教具づくりに関する一考察，兵庫県立教育研修所平成 20 年度研究紀要，119，28，2009.

日本教材学会編：教材学概論，図書文化社，173，2016.

R. R. スケンプ：数学教育の心理学（藤永保他訳），新曜社，35, 1985. 原著：The Psychology of Learning Mathematics

澁谷久：概念・原理・法則にシェマを形成するイメージをともす数学的教具に関する一研究，北海道教育大学教育学研究科修士論文，3－5，1997.

澁谷久他：数学教育における学習具開発に関する研究，日本数学教育学会誌，93(1)，3，　2011.

澁谷久：小学校と中学校の図形学習における汎用性を備える数学的学習具に関する考察，日本数学教育学会第 97 巻数学教育学論究臨時増刊（第 48 回秋期研究大会特集号），　96，2015.

澁谷久：数学教育に個人による現物実験を取り入れる実証的研究，稚内北星学園大学紀要，17，22，2017.

鈴木克明：教材設計マニュアル，北大路書房，176-179，2007.

● 英文タイトル

A Study on the Characteristics of the Mathematical Learning Tools to Form a Structural　Image

● 英文要約

The aim of this study is to consider the state of the teaching tools and the learning tools in mathematics education by making the image a point of view, and to indicate empirically in the class practice.In order to achieve the aim, I would like to define the mathematical teaching tools and learning tools, and consider the significance of them.Furthermore, I would like to indicate an image and its workings in the mathematics education concerned with the significance, and consider the state of characteristics of the mathematical teaching tools and the learning tools from the point of view of the structuration of an image.Based on that, I formulated and practiced the experimental classes using the learning tools I have developed in junior high school mathematics which have each characteristic.As a result, I would like to indicate empirically that the state of the mathematical learning tools influences the value of the concrete operation activity.

● Key words

developing teaching materials
mathematics
mathematical　learning tools
characteristics
image

● 附記

本研究は，科学研究費助成事業基盤研究（C）「数学的学習具の発達段階に応じた特性に関する実践的研究」（研究代表者，2017 年度～2019 年度，研究課題番号 17K04876）の研究成果の一部である．